

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΚΟΙΛΟΔΟΚΟΥΣ  
ΠΛΗΡΩΜΕΝΕΣ ΜΕ ΣΚΥΡΟΔΕΜΑ  
ΜΕ ΑΜΙΓΩΣ ΧΑΛΥΒΑΙΝΕΣ ΔΙΑΤΟΜΕΣ ΚΟΙΛΟΔΟΚΩΝ**

**Άννα Α. Μαρινοπούλου<sup>a</sup>, Χρίστος Ν. Κάλφας<sup>b</sup>, Βίκτωρ Δ. Μπαλόπουλος<sup>b</sup>,  
Ευάγγελος Γ. Γαλούσης<sup>c</sup>**

<sup>a</sup> Υποψ. Διδ., MSc Πολιτικός Μηχανικός

<sup>b</sup> Επικ. Καθηγητής Δ.Π.Θ.

<sup>c</sup> Καθηγητής Δ.Π.Θ.

Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών Δ.Π.Θ.

Ξάνθη, Ελλάδα

e-mail: [msslgroup@civil.duth.gr](mailto:msslgroup@civil.duth.gr)

## **1. ΠΕΡΙΛΗΨΗ**

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται μεθοδολογία για την προσομοίωση υποστυλωμάτων από κοιλοδοκούς, πληρωμένων με σκυρόδεμα, με αμιγώς χαλύβδινες ιδεατές διατομές κοιλοδοκών. Η ιδεατή διατομή, που επιλέγεται για την προσομοίωση, έχει την ίδια μορφή με την αρχική σύμμικτη διατομή (ορθογωνική, τετράγωνη ή κυκλική) αλλά με διαφορετικές διαστάσεις, προκειμένου να προσομοιωθεί η πρόσθετη ακαμψία (καμπτική και αξονική), που προσφέρει το σκυρόδεμα πλήρωσης. Οι συνθήκες ισοδυναμίας των ακαμψιών, καμπτικών και αξονικών, της αρχικής και της ιδεατής διατομής, οδηγούν σε ένα σύστημα εξισώσεων με άγνωστες παραμέτρους τις γεωμετρικές διαστάσεις της ιδεατής διατομής. Η λύση του συστήματος είναι κλειστή συναρτήσεως των γεωμετρικών και μηχανικών παραμέτρων της αρχικής διατομής. Η προτεινόμενη μεθοδολογία δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα και, κατά συνέπεια, μπορεί να αποτελέσει έναν εύχρηστο τρόπο αντικατάστασης υποστυλωμάτων πληρωμένων με σκυρόδεμα με αμιγώς χαλύβδινες διατομές, στην καθολική ελαστική ανάλυση σύμμικτων κατασκευών.

## **2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ**

Σε πρόσφατα δημοσιευμένη εργασία [1] παρουσιάστηκε μια αξιόπιστη και εύχρηστη μεθοδολογία προσομοίωσης μερικώς εγκιβωτισμένων σύμμικτων υποστυλωμάτων με αμιγώς χαλύβδινες διατομές. Η μεθοδολογία αυτή προσφέρει τη δυνατότητα αντικατάστασης σύμμικτων διατομών υποστυλωμάτων με αμιγώς χαλύβδινες διατομές. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατόν να γίνει καθολική ελαστική ανάλυση σύμμικτων δομικών πλαισίων, αντικαθιστώντας τις διατομές των σύμμικτων υποστυλωμάτων με αμιγώς χαλύβδινες διατομές, και κάνοντας χρήση των ευρέως διαδεδομένων εμπορικών λογισμικών πακέτων ανάλυσης για κατασκευές από χάλυβα, δεδομένης και της σχετικής έλλειψης αντιστοίχων λογισμικών για σύμμικτες κατασκευές.

Η προταθείσα μεθοδολογία προσομοίωσης επεκτείνεται και σε κοίλες διατομές (ορθογωνικές ή κυκλικές) πληρωμένες με σκυρόδεμα. Οι συνθήκες ισοδυναμίας των σύμμικτων και των αντιστοιχών ιδεατών αμιγώς χαλύβδινων διατομών, που θα πρέπει να πληρούνται, είναι οι ακόλουθες:

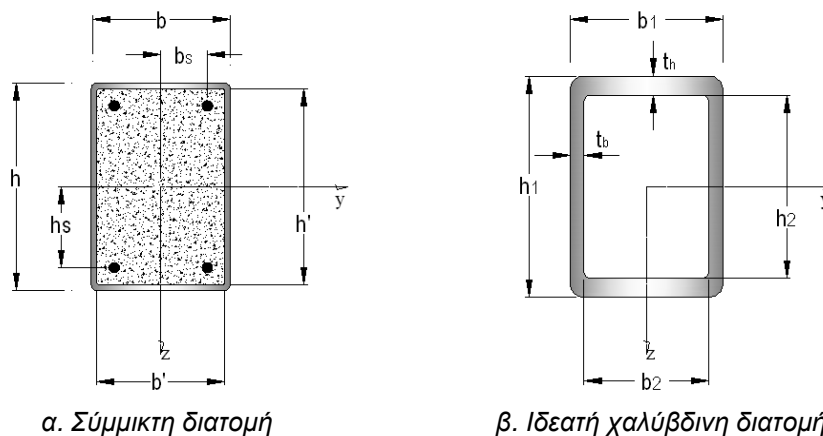
1. οι αξονικές ακαμψίες των δύο τύπων διατομών να είναι ίσες, και
2. οι καμπτικές ακαμψίες και ως προς τους δύο κεντροβαρικούς άξονες να είναι οι ίδιες και για τους δύο τύπους των διατομών.

Ύστερα από αναλυτικούς υπολογισμούς, διαπιστώθηκε ότι η ιδεατή χαλύβδινη διατομή, που προσομοιώνει πλήρως τη σύμμικτη, έχει την ίδια μορφή-σχήμα (ορθογωνική ή κυκλική κοίλη) με την τελευταία αλλά με διαφορετικές εσωτερικές και εξωτερικές διαστάσεις και πάχη ελασμάτων. Στα Σχ. 1 και Σχ. 2 φαίνονται η σύμμικτη και η αντίστοιχη ιδεατή χαλύβδινη διατομή, για ορθογωνικές και κυκλικές κοιλοδοκούς, αντίστοιχα.

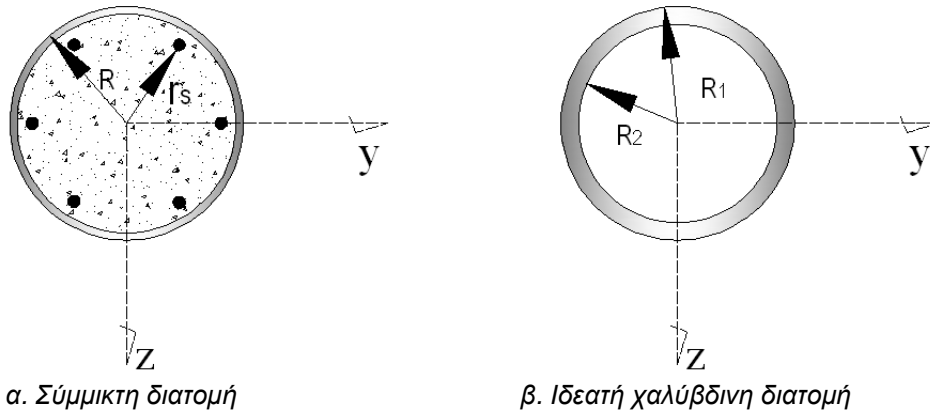
### 3. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΩΝ ΚΟΙΛΟΔΟΚΩΝ ΠΛΗΡΩΜΕΝΩΝ ΜΕ ΣΚΥΡΟΔΕΜΑ

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η ιδεατή χαλύβδινη διατομή, που επιλέγεται για την προσομοίωση των ορθογωνικών κοιλοδοκών πληρωμένων με σκυρόδεμα, έχει την ίδια μορφή με τη χαλύβδινη διατομή του σύμμικτου υποστυλώματος, δηλ. ορθογωνική ή και τετράγωνη, αλλά με διαφορετικές διαστάσεις. Για την πλήρη και επακριβή περιγραφή της ιδεατής διατομής χρειάζεται να προσδιοριστούν τέσσερις γεωμετρικές διαστάσεις, οι δύο εξωτερικές  $h_1$  και  $b_1$  και οι δύο εσωτερικές  $h_2$  και  $b_2$ , όπως φαίνονται και στο Σχ. 1β. Αξίζει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι τα οριζόντια και τα κάθετα ελάσματα, που μορφώνουν την ιδεατή διατομή, δεν έχουν, κατά κανόνα, το ίδιο πάχος.

Οι γεωμετρικές διαστάσεις  $h_1$ ,  $b_1$ ,  $h_2$  και  $b_2$  προσδιορίζονται από τις εξισώσεις, που προκύπτουν, λαμβάνοντας υπόψη τα τρία κριτήρια ισοδυναμίας των σύμμικτων και χαλύβδινων ιδεατών διατομών, που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Δεδομένου ότι οι εξισώσεις αυτές είναι τρεις, ενώ οι άγνωστες γεωμετρικές διαστάσεις είναι τέσσερις, για την επίλυση του μαθηματικού προβλήματος και την εύρεση μιας και μοναδικής λύσης απαιτείται να τεθεί ένας γεωμετρικός περιορισμός. Ως πρόσθετος γεωμετρικός περιορισμός λαμβάνεται η πιο κάτω εμπειρική σχέση μεταξύ των γεωμετρικών στοιχείων της διατομής:



Σχ. 1. Προσομοίωση ορθογωνικής κοιλοδοκού πληρωμένης με σκυρόδεμα με ιδεατή χαλύβδινη διατομή



Σχ. 2. Προσομοίωση κυκλικής κοιλοδοκού πληρωμένης με σκυρόδεμα με ιδεατή χαλύβδινη διατομή

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{h_2}{h_1} = \alpha < 1 \Leftrightarrow \frac{t_b}{b_1} = \frac{t_h}{h_1} = \frac{1-\alpha}{2} \quad (1)$$

Γενικώς, σημειώνεται ότι στις περιπτώσεις κοίλων διατομών πληρωμένων με σκυρόδεμα, δεν απαιτείται διαμήκης χαλαρός οπλισμός, εκτός και αν κάτι τέτοιο επιβάλλεται για λόγους πυραντίστασης [2], [3], [4], and [5]. Η μαθηματική προσομοίωση, που αναπτύσσεται στη συνέχεια, είναι γενική και λαμβάνει υπόψη και την ύπαρξη του χαλαρού διαμήκους οπλισμού, στην περίπτωση που μπορεί αυτός να θεωρηθεί ως φέρων. Όταν προστίθεται μόνο για λόγους πυραντίστασης, τότε μπορούν να παραβλεφθούν οι όροι που περιλαμβάνουν στοιχεία του.

Η αξονική ακαμψία κάθε κοίλης διατομής πληρωμένης με σκυρόδεμα δίνεται από τη σχέση [2]:

$$(EA)_e^{actual} = E_a A_a + E_a A_s + E_c A_c \quad (2)$$

Η αντίστοιχη ακαμψία της ιδεατής διατομής, όπως άλλωστε για κάθε αμιγώς χαλύβδινη διατομή, είναι [6]:

$$(EA)_a^{fict} = E_a A_{fict} \quad (3)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη συνθήκη ισοδυναμίας των αξονικών ακαμψιών προκύπτει:

$$\frac{A_{fict}}{bh} = \rho_a + (\rho_s + \psi_c) \frac{\rho'_a}{\rho'_s} = d_{x,R}^2 \quad (4)$$

Το δεξίό μέλος της ανωτέρω εξίσωσης εξαρτάται μόνο από τις γεωμετρικές και μηχανικές παραμέτρους της αρχικής πληρωμένης με σκυρόδεμα κοίλης διατομής και για το λόγο αυτό αντικαθίσταται από μία θετική σταθερή παράμετρο  $d_{x,R}^2$ . Το συνολικό εμβαδόν της ιδεατής χαλύβδινης διατομής (Σχ. 1β), λαμβάνοντας υπόψη και τους γεωμετρικούς περιορισμούς, οδηγεί στην ακόλουθη σχέση:

$$\frac{A_{fict}}{bh} = \beta_1 \eta_1 (1 - \alpha^2) \quad (5)$$

Από τις εξισώσεις (4) και (5) προκύπτει η πρώτη σχέση, που συνδέει τις άγνωστες παραμέτρους  $\beta_1$ ,  $\eta_1$  και  $\alpha$ :

$$\beta_1 \eta_1 (1 - \alpha^2) = d_{x,R}^2 \quad (6)$$

Η εξίσωση (6) είναι η αδιαστατοποιημένη εξίσωση που εκφράζει την ισοδυναμία των αξονικών ακαμψιών της κοίλης διατομής πληρωμένης με σκυρόδεμα και της αντίστοιχης ιδεατής αμιγώς χαλύβδινης διατομής.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, προκύπτει και η εξίσωση που εκφράζει την ισοδυναμία των καμπτικών ακαμψιών ως προς τον ισχυρό άξονα yy. Έτσι, η σχέση που δίνει την καμπτική ακαμψία μιας κοίλης διατομής πληρωμένης με σκυρόδεμα περί τον ισχυρό άξονα yy της διατομής είναι [2]:

$$(EI)_{y,e}^{\text{actual}} = E_a I_{a,y} + E_c I_{c,y} + E_a I_{s,y} \quad (7)$$

Η καμπτική ακαμψία της ιδεατής αμιγώς χαλύβδινης διατομής εκφράζεται ως [6]:

$$(EI)_{y,a}^{\text{fict}} = E_a I_{\text{fict},y} \quad (8)$$

Από τις εξισώσεις (7) και (8) και τη συνθήκη ισότητας των καμπτικών ακαμψιών των δύο διατομών λαμβάνεται:

$$\frac{12I_{\text{fict},y}}{bh^3} = 3\rho_a \lambda_{ay}^2 + \psi_c (1 - 3\rho_a \lambda_{ay}^2) + \frac{\rho'_a}{\rho'_s} (1 - \psi_c) (3\rho_s \lambda_{sy}^2) = d_{y,R}^2 \quad (9)$$

όπου, η παράμετρος  $d_{y,R}^2$  είναι θετική και σταθερή, καθώς εξαρτάται μόνο από τις γεωμετρικές και μηχανικές παραμέτρους της αρχικής κοίλης διατομής που πληρούται με σκυρόδεμα. Η αντίστοιχη προς την (9) αδιάστατη ποσότητα για την ιδεατή διατομή είναι:

$$\frac{12I_{\text{fict},y}}{bh^3} = \beta_1 \eta_1^3 (1 - \alpha^4) \quad (10)$$

Από τις εξισώσεις (9) και (10) προκύπτει η δεύτερη σχέση, που συνδέει τις άγνωστες παραμέτρους  $\beta_1$ ,  $\eta_1$  και  $\alpha$ :

$$\beta_1 \eta_1^3 (1 - \alpha^4) = d_{y,R}^2 \quad (11)$$

Η εξίσωση (11) εκφράζει την ισοδυναμία των καμπτικών ακαμψιών περί τον ισχυρό άξονα των δύο διατομών, κοίλης πληρωμένης με σκυρόδεμα και ιδεατής αμιγώς χαλύβδινης.

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτουν οι σχέσεις που ικανοποιούν και την τρίτη συνθήκη ισοδυναμίας των καμπτικών ακαμψιών και κατά τον ασθενή άξονα zz, όπως φαίνονται στη συνέχεια, και είναι αντίστοιχες των (9) και (10):

$$\frac{12I_{\text{fict},z}}{b^3 h} = 3\rho_a \lambda_{az}^2 + \psi_c (1 - 3\rho_a \lambda_{az}^2) + \frac{\rho'_a}{\rho'_s} (1 - \psi_c) (3\rho_s \lambda_{sz}^2) = d_{z,R}^2 \quad (12)$$

$$\frac{12I_{\text{fict},z}}{b^3 h} = \eta_1 \beta_1^3 (1 - \alpha^4) \quad (13)$$

Η αδιαστατοποιημένη εξίσωση που εκφράζει την ισοδυναμία των καμπτικών ακαμψιών ως προς τον ασθενή άξονα των δύο διατομών δίνει την τρίτη σχέση, που συνδέει μεταξύ τους τις τρεις άγνωστες παραμέτρους  $\beta_1$ ,  $\eta_1$  και  $\alpha$ :

$$\eta_1 \beta_1^3 (1 - \alpha^4) = d_{z,R}^2 \quad (14)$$

Το δεξιό μέλος της σχέσης (14) είναι μία θετική και σταθερή παράμετρος, που εξαρτάται από τις μηχανικές και γεωμετρικές παραμέτρους της αρχικής κοίλης διατομής πληρωμένης με σκυρόδεμα.

Το σύστημα των τριών μη-γραμμικών εξισώσεων (6), (11) και (14), που έχει προκύψει, επιτρέπει τον προσδιορισμό των τριών αγνώστων παραμέτρων  $\beta_1$ ,  $\eta_1$  και  $\alpha$ , από τις

οποίες προκύπτουν οι άγνωστες γεωμετρικές διαστάσεις  $b_1$ ,  $h_1$ ,  $b_2$  και  $h_2$  της ιδεατής διατομής.

Με κατάλληλους μετασχηματισμούς μεταξύ των εξισώσεων (6), (11) και (14) προκύπτει η ακόλουθη έκφραση για την παράμετρο  $\alpha$ :

$$\frac{d_{y,R}d_{z,R}}{d_{x,R}^2(1+\alpha^2)} \cdot (1-\alpha^2) = d_{x,R}^2 \Leftrightarrow \frac{(1-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)} = \frac{d_{x,R}^4}{d_{y,R}d_{z,R}} = k \quad (15)$$

Όπως είναι φανερό, η παράμετρος  $k$  στο δεξιό μέλος εξαρτάται από τις γεωμετρικές και μηχανικές παραμέτρους της αρχικής κοίλης πληρωμένης με σκυρόδεμα διατομής. Η εξίσωση (15) επιδέχεται την ακόλουθη κλειστή λύση:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \quad (16)$$

Τέλος, για τις άγνωστες παραμέτρους  $\beta_1$ ,  $\eta_1$  προκύπτουν οι αντίστοιχες εκφράσεις:

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{1+k}{2}} \frac{d_{y,R}}{d_{x,R}} \quad (17)$$

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{1+k}{2}} \frac{d_{z,R}}{d_{x,R}} \quad (18)$$

Οι εξισώσεις (16), (17) και (18) αποτελούν την κλειστή λύση του μη-γραμμικού συστήματος με αγνώστους τις παραμέτρους  $\alpha$ ,  $\eta_1$  και  $\beta_1$ , αντίστοιχα, οι οποίες, με τη σειρά τους, οδηγούν στον προσδιορισμό των αγνώστων διαστάσεων  $b_1$ ,  $h_1$ ,  $b_2$  και  $h_2$  της ιδεατής διατομής. Οι εξισώσεις αυτές ικανοποιούν επακριβώς τις εξισώσεις, που απαιτούνται για την ταυτοποίηση των αξονικών και καμπτικών και ως προς τους δύο κεντροβαρικούς άξονες ακαμψιών των κοίλων πληρωμένων με σκυρόδεμα και των αντίστοιχων ιδεατών αμιγώς χαλύβδινων διατομών.

Οι τετράγωνες κοίλες διατομές πληρωμένες με σκυρόδεμα είναι μία ειδική περίπτωση των ορθογωνικών, στις οποίες το πλάτος της διατομής είναι ίσο με το ύψος της, δηλ.  $b = h$ . Η ιδεατή διατομή είναι, επίσης, τετραγωνικής μορφής με ενιαίο πάχος ελασμάτων. Οι άγνωστες προσδιοριστέες παράμετροι περιορίζονται σε δύο, την εξωτερική διάσταση,  $h_1$ , και το λόγο  $\alpha$ , οι οποίες μπορούν να προσδιοριστούν με τη βοήθεια των εξισώσεων (16) και (17), αν το πλάτος  $b$  αντικατασταθεί με το ύψος της διατομής  $h$ , κατά τον υπολογισμό των σταθερών παραγόντων  $d_{x,R}^2$  και  $d_{y,R}^2 \equiv d_{z,R}^2$ .

#### 4. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΚΟΙΛΩΝ ΔΙΑΤΟΜΩΝ ΠΛΗΡΩΜΕΝΩΝ ΜΕ ΣΚΥΡΟΔΕΜΑ

Η ιδεατή αμιγώς χαλύβδινη διατομή, που επιλέγεται για την προσομοίωση, αποτελείται από τη χαλύβδινη διατομή τύπου CHS του σύμμικτου υποστυλώματος και δύο πρόσθετες κυκλικές κοίλες διατομές διαφορετικού πάχους, που βρίσκονται σε επαφή με την εξωτερική και εσωτερική επιφάνεια της CHS. Τελικά, η ιδεατή διατομή έχει την ίδια μορφή με την κοίλη διατομή, που επιχειρείται να προσομοιωθεί, δηλ. προκύπτει μία κυκλική διατομή διαφορετικής διαμέτρου και πάχους από την αρχική χαλύβδινη διατομή της πληρωμένης με σκυρόδεμα σύμμικτης διατομής. Όπως και στην περίπτωση των ορθογωνικών ιδεατών κοίλων διατομών, η συνολική διάμετρος και το πάχος της ιδεατής

κυκλικής κοίλης διατομής αντικαθίστανται, για λόγους απλοποίησης, με την εξωτερική και την εσωτερική ακτίνα,  $R_1$  και  $R_2$ , αντίστοιχα (Σχ. 2β).

Οι δύο άγνωστες παράμετροι προσδιορίζονται επί τη βάσει των συνθηκών ισοδυναμίας των αξονικών και καμπτικών ακαμψιών, όπως αναφέρθηκε. Όμοια με την περίπτωση των ορθογωνικών ιδεατών κοίλων διατομών, οι δύο εξισώσεις, που απαιτούνται για τον προσδιορισμό των δύο αγνώστων παραμέτρων, προκύπτουν σε κανονικοποιημένη μορφή, με διαδικασία όμοια με την προηγούμενη. Για το σκοπό αυτό εισάγονται δύο αδιάστατες μεταβλητές, οι  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$ , που περιγράφουν την κανονικοποιημένη μορφή των αγνώστων ακτινών,  $R_1$  και  $R_2$ , αντίστοιχα:

$$\gamma_1 = R_1/R \quad \text{και} \quad \gamma_2 = R_2/R \quad (19)$$

Οι εξισώσεις (2) και (3), που εκφράζουν την αξονική ακαμψία μιας διατομής σύμμικτου υποστυλώματος και της αντίστοιχης αμιγώς χαλύβδινης ιδεατής, αντίστοιχα, ισχύουν και στην περίπτωση των κυκλικών σωλήνων. Όπως φαίνεται από το Σχ. 3α, το συνολικό εμβαδόν του “κιβωτίου” της κυκλικής σύμμικτης διατομής,  $\pi R^2$ , είναι το άθροισμα των εμβαδών της χαλύβδινης διατομής,  $A_a$ , του σκυροδέματος,  $A_c$ , και του διαμήκους οπλισμού,  $A_s$ , δηλ. είναι:

$$\pi R^2 \equiv A_a + A_s + A_c \quad \Leftrightarrow \quad A_c \equiv \pi R^2 - A_a - A_s \quad (20)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την παραπάνω ισότητα και κάνοντας χρήση των αδιάστατων παραμέτρων  $\rho_a$ ,  $\rho'_a$ ,  $\rho_s$ , και  $\rho'_s$ , προκύπτει:

$$\frac{A_{\text{fict}}}{\pi R^2} = \rho_a + (\rho_s + \psi_c) \frac{\rho'_a}{\rho'_s} = d_{x,c}^2 \quad (21)$$

η οποία είναι παρόμοια με την εξίσωση (4). Το συνολικό εμβαδόν της ιδεατής χαλύβδινης διατομής με την εισαγωγή των  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$  από τη σχέση (19) μετασχηματίζεται σε:

$$\frac{A_{\text{fict}}}{\pi R^2} = \frac{\pi \gamma_1^2 R^2}{\pi R^2} - \frac{\pi \gamma_2^2 R^2}{\pi R^2} = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 \quad (22)$$

Έτσι, με τη βοήθεια των εξισώσεων (21) και (22), προκύπτει η πρώτη σχέση μεταξύ των αγνώστων παραμέτρων  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$ :

$$\gamma_1^2 - \gamma_2^2 = d_{x,c}^2 \quad (23)$$

Θεωρώντας τις πολικές ακαμψίες έναντι των αξονικών ακαμψιών των ορθογωνικών διατομών και με τα στοιχεία του Σχ. 2α προκύπτουν οι ακόλουθες ισότητες αντίστοιχες των (2), (7) και (8):

$$\pi R^4/4 \equiv I_{a,p} + I_{s,p} + I_{c,p}, \quad I_{a,p} \equiv A_a r_{a,p}^2 \quad \text{και} \quad I_{s,p} \equiv A_s r_s^2 \equiv \rho_s A_c r_s^2 \quad (24)$$

και, επομένως, η εξίσωση (8) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{4I_{\text{fict},p}}{\pi R^4} = \rho_a \lambda_{ap}^2 + \psi_c (1 - \rho_a \lambda_{ap}^2) + \frac{\rho'_a}{\rho'_s} (1 - \psi_c) (\rho_s \lambda_{sp}^2) = d_{p,c}^2 \quad (25)$$

στην οποία ο θετικός σταθερός όρος  $d_{p,c}^2 \equiv 2d_{y,c}^2 \equiv 2d_{z,c}^2$  εξαρτάται από τις γεωμετρικές και μηχανικές παραμέτρους της αρχικής κυκλικής κοίλης πληρωμένης με σκυρόδεμα διατομής. Η πολική ροπή αδρανείας της ιδεατής διατομής με την εισαγωγή των  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$ , εκφράζεται ως:

$$\frac{4I_{\text{fict,p}}}{\pi R^4} = \gamma_1^4 - \gamma_2^4 \quad (26)$$

Από τις εξισώσεις (25) και (26) προκύπτει η δεύτερη σχέση που συνδέει τις άγνωστες παραμέτρους  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$ :

$$\gamma_1^4 - \gamma_2^4 = d_{p,c}^2 \quad (27)$$

η οποία αποτελεί την κανονικοποιημένη έκφραση της συνθήκης ισοδυναμίας των καμπτικών ακαμψιών σύμμικτης και ιδεατής διατομής.

Οι σχέσεις (23) και (27) συνθέτουν ένα σύστημα δύο μη-γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τις παραμέτρους  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$ , το οποίο δίνει κλειστή λύση. Ως εκ τούτου, οι άγνωστες ακτίνες  $R_1$  και  $R_2$ , που περιγράφουν πλήρως την ιδεατή διατομή, μπορούν στη συνέχεια να προσδιοριστούν επακριβώς.

Η λύση του συστήματος είναι:

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{d_{p,c}^2 + d_{x,c}^4}{2d_{x,c}^2}} \quad \text{και} \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{d_{p,c}^2 - d_{x,c}^4}{2d_{x,c}^2}} \quad (28)$$

Επομένως, η ιδεατή διατομή με  $R_1 = \gamma_1 R$  και  $R_2 = \gamma_2 R$  έχει ακριβώς τις ίδιες, αξονική και καμπτική, ακαμψίες με την αρχική κυκλική κοίλη πληρωμένη με σκυρόδεμα διατομή.

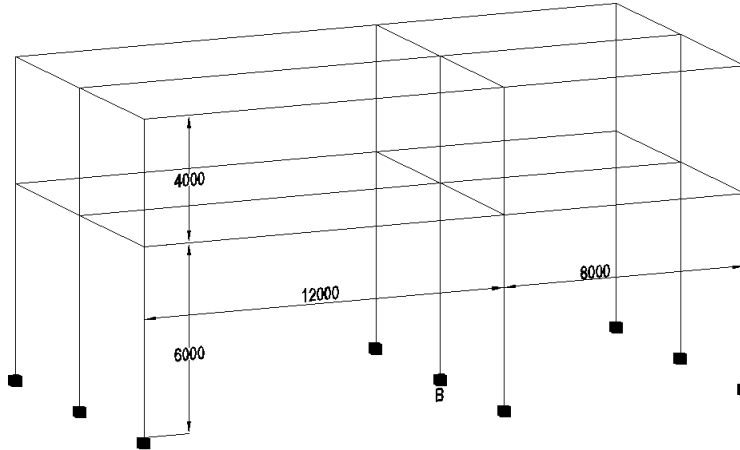
## 5. ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑ ΤΗΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ

Η προτεινόμενη μεθοδολογία προσομοίωσης κοίλων διατομών, ορθογωνικών ή και κυκλικών, πληρωμένων με σκυρόδεμα με αμιγώς χαλύβδινες ιδεατές διατομές, είναι εύχρηστη και αξιόπιστη, δεδομένου ότι παρέχονται κλειστές σχέσεις υπολογισμού των γεωμετρικών διαστάσεων των ιδεατών διατομών, απολύτως ακριβείς, αφού τα προκύπτοντα συστήματα εξισώσεων έχουν επιλυθεί χωρίς προσεγγίσεις. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ώστε οι ακαμψίες, τόσο οι αξονικές όσο και οι καμπτικές και ως προς τους δύο κεντροβαρικούς άξονες, των σύμμικτων και των αντίστοιχων ιδεατών διατομών να είναι ταυτόσημες. Ως εκ τούτου, οι τιμές των παραμορφώσεων και των εσωτερικών δυνάμεων, που παρέχονται από την καθολική ελαστική ανάλυση δομικών συστημάτων, τα οποία μορφώνονται με υποστυλώματα κοίλων διατομών πληρωμένων με σκυρόδεμα, είναι οι ίδιες με εκείνες που προκύπτουν στην περίπτωση αντικατάστασης των διατομών των υποστυλωμάτων με τις αντίστοιχες ιδεατές διατομές.

Για την επιβεβαίωση των παραπάνω, η προτεινόμενη μεθοδολογία εφαρμόζεται σε ένα τρισδιάστατο διώροφο χωρικό πλαίσιο, που συνίσταται από τρία επίπεδα τρίστηλα πλαίσια, τα οποία διατάσσονται ανά 5000 mm (Σχ. 3). Τα ζυγώματα των πλαισίων είναι σύμμικτες δοκοί σταθερής διατομής HE300A, ενώ οι δοκοί σύνδεσης των επιπέδων πλαισίων είναι, επίσης, σύμμικτες, σταθερής διατομής HE100A. Η ποιότητα του χάλυβα για τις δοκούς είναι S 235, ενώ οι πλάκες έχουν πάχος 200 mm και κατηγορία σκυροδέματος C 20/25. Τα σύμμικτα υποστυλώματα επιλέγονται να έχουν διάφορες διατομές, ποιότητες χάλυβα και κατηγορίες σκυροδέματος και με βάση την προτεινόμενη μεθοδολογία προσδιορίζονται οι διατομές των αντίστοιχων ιδεατών. Με χρήση διαφόρων εμπορικών προγραμμάτων γίνεται καθολική ελαστική ανάλυση για διάφορες φορτίσεις

τόσο των δομημάτων με τα σύμμικτα υποστυλώματα όσο και εκείνων με τα προσομοιωμένα ιδεατά.

Οι φορτίσεις του δομήματος είναι, εκτός από τα κατακόρυφα φορτία βαρύτητας, και οριζόντια επικόμβια φορτία (από 0 έως 300 kN), με τα οποία προσομοιώνονται σεισμικές



Σχ. 3 Χωρικό πλαίσιο για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου

δράσεις ή/και δράσεις ανέμου και τα οποία ασκούνται και στις δύο κύριες διευθύνσεις του πλαισίου. Στους Πιν. 1-Πιν. 3 παρουσιάζονται ενδεικτικά τα αποτελέσματα για διάφορους συνδυασμούς διατομών, ποιτήτων χάλυβα και κατηγοριών σκυροδέματος και για οριζόντια φορτία 0, 50 και 300 kN, αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα αναφέρονται στις εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στη βάση του κεντρικού υποστυλώματος (κόμβος Β στο Σχ. 3), που λαμβάνονται από τις αναλύσεις των προγραμμάτων Η/Υ, που χρησιμοποιήθηκαν, του δομήματος με σύμμικτα υποστυλώματα και με τα αντίστοιχα ιδεατά αμιγώς χαλύβδινα.

Όπως φαίνεται στους Πιν. 1-Πιν. 3, δεν παρουσιάζονται σημαντικές διαφορές μεταξύ των εντατικών μεγεθών στις περιπτώσεις αντικατάστασης των κοίλων διατομών πληρωμένων με σκυρόδεμα με τις αντίστοιχες ιδεατές αμιγώς χαλύβδινες, έτσι όπως προκύπτουν από την προτεινόμενη μεθοδολογία προσομοίωσης. Σε κάθε περίπτωση, τα σχετικά σφάλματα δεν ξεπερνούν το 3%, που είναι δυνατόν να οφείλονται και στις προσεγγίσεις που χρησιμοποιούν τα προγράμματα. Σε κάθε περίπτωση, όμως, οι αποκλίσεις αυτές είναι αποδεκτές στις πρακτικές εφαρμογές, γεγονός που καθιστά την προτεινόμενη μεθοδολογία προσομοίωσης εύχρηστη και ακριβή.

Διατομή	$M_{y,steel}$	$M_{y,comp}$	$M_{z,steel}$	$M_{z,comp}$	$N_{x,steel}$	$N_{x,comp}$	$V_{y,steel}$	$V_{y,comp}$	$V_{z,steel}$	$V_{z,comp}$
Χάλυβας S235 – Σκυρόδεμα C30/37										
RHS 300x200x10	139.83	140.15	0.02	0.02	893.90	893.55	0.01	0.01	12.40	12.42
CHS 219.1x12.5	80.96	82.74	0.03	0.03	954.90	953.29	0.01	0.01	8.01	8.16
Χάλυβας S275 – Σκυρόδεμα C20/25										
RHS 150x100x5	22.49	22.61	0	0	1000.3	1000.2	0	0	2.70	2.72



## Χάλυβας S355 – Σκυρόδεμα C20/25

SHS 100x5	8.42	8.48	0.01	0.01	1008.9	1008.9	0	0	1.08	1.09
CHS 48.3x5	0.44	0.43	0	0	983.94	983.62	0	0	0.06	0.06

Πιν. 1. Αποτελέσματα ανάλυσης δομήματος (σε kN και kN.m) με μηδενικά οριζόντια φορτία

Διατομή	$M_{y,steel}$	$M_{y,comp}$	$M_{z,steel}$	$M_{z,comp}$	$N_{x,steel}$	$N_{x,comp}$	$V_{y,steel}$	$V_{y,comp}$	$V_{z,steel}$	$V_{z,comp}$
---------	---------------	--------------	---------------	--------------	---------------	--------------	---------------	--------------	---------------	--------------

## Χάλυβας S235 – Σκυρόδεμα C30/37

RHS 300x200x10	95.86	95.91	266.68	266.68	909.54	909.20	33.35	33.35	27.37	27.37
CHS 219.1x12.5	92.97	92.92	266.68	266.68	968.36	966.82	33.34	33.34	28.79	28.72

## Χάλυβας S275 – Σκυρόδεμα C20/25

RHS 150x100x5	97.08	97.07	266.67	266.67	1011.4	1011.3	33.34	33.34	31.77	31.76
---------------	-------	-------	--------	--------	--------	--------	-------	-------	-------	-------

## Χάλυβας S355 – Σκυρόδεμα C20/25

SHS 100x5	98.79	98.79	266.67	266.67	1019.3	1019.3	33.33	33.33	32.71	32.70
CHS 48.3x5	99.99	99.99	266.67	266.67	993.24	992.91	33.33	33.33	33.32	33.32

Πιν. 2. Αποτελέσματα ανάλυσης δομήματος (σε kN και kN.m) με οριζόντια φορτία 50 kN

Διατομή	$M_{y,steel}$	$M_{y,comp}$	$M_{z,steel}$	$M_{z,comp}$	$N_{x,steel}$	$N_{x,comp}$	$V_{y,steel}$	$V_{y,comp}$	$V_{z,steel}$	$V_{z,comp}$
---------	---------------	--------------	---------------	--------------	---------------	--------------	---------------	--------------	---------------	--------------

## Χάλυβας S235 – Σκυρόδεμα C30/37

RHS 300x200x10	715.21	715.71	1599.9	1599.9	987.78	987.49	200.04	200.04	226.19	226.27
CHS 219.1x12.5	649.19	650.59	1599.9	1599.9	1035.7	1034.5	200.01	200.02	212.78	213.11

## Χάλυβας S275 – Σκυρόδεμα C20/25

RHS 150x100x5	614.41	614.47	1600.0	1600.0	1066.5	1066.5	200.01	200.01	204.12	204.14
---------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

## Χάλυβας S355 – Σκυρόδεμα C20/25

SHS 100x5	605.71	605.74	1600.0	1600.0	1071.3	1071.3	200.00	200.00	201.66	201.67
CHS 48.3x5	600.68	600.67	1600.0	1600.0	1039.7	1039.4	200.00	200.00	200.21	200.21

Πιν. 3. Αποτελέσματα ανάλυσης δομήματος (σε kN και kN.m) με οριζόντια φορτία 300 kN

## 6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μία μέθοδος προσομοίωσης κοίλων διατομών υποστυλωμάτων (ορθογωνικών ή/και τετραγωνικών και κυκλικών) πληρωμένων με σκυρόδεμα με αμιγώς χαλύβδινες ιδεατές διατομές, προκειμένου με τον τρόπο αυτό να είναι δυνατόν να γίνει καθολική ελαστική ανάλυση σύμμικτων δομικών συστημάτων,

κάνοντας χρήση των διαφόρων εμπορικών λογισμικών πακέτων για κατασκευές από χάλυβα.

Οι ιδεατές διατομές των υποστυλωμάτων έχουν προκαθορισμένη μορφή και οι προσδιοριστέες παράμετροι είναι οι γεωμετρικές τους διαστάσεις. Αυτές οι παράμετροι είναι δυνατόν να προσδιοριστούν λαμβάνοντας υπόψη τα κριτήρια ισοδυναμίας των ακαμψιών (αξονικής και καμπτικών) της αρχικής σύμμικτης και της ιδεατής διατομής. Στις περιπτώσεις, όπου η ιδεατή διατομή έχει περισσότερες προσδιοριστέες γεωμετρικές παραμέτρους από τις συνθήκες ισοδυναμίας, εισάγονται κατάλληλοι περιορισμοί.

Η επιλογή του σχήματος της ιδεατής διατομής και των κατάλληλων γεωμετρικών περιορισμών έγινε ύστερα από δοκιμαστικούς αναλυτικούς υπολογισμούς. Τα σχήματα των ιδεατών διατομών έχουν γενικά τη μορφή των αρχικών διατομών, αλλά διαφορετικές διαστάσεις. Σημειώνεται ότι, οι ορθογωνικές ιδεατές διατομές δεν έχουν το ίδιο πάχος τοιχωμάτων και στις δύο διευθύνσεις. Οι γεωμετρικές και μηχανικές παράμετροι τόσο της αρχικής σύμμικτης όσο και της ιδεατής διατομής εκφράζονται σε αδιάστατη μορφή, γεγονός που διευκολύνει τις πράξεις.

Σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν, οι συνθήκες ισοδυναμίας των δύο διατομών καταλήγουν σε ένα μη-γραμμικό σύστημα με αγνώστους τις αδιάστατες γεωμετρικές παραμέτρους της ιδεατής διατομής. Το σύστημα αυτό επιδέχεται κλειστή λύση. Ως εκ τούτου, η ιδεατή διατομή και η αρχική κοίλη πληρωμένη με σκυρόδεμα έχουν ακριβώς τις ίδιες ακαμψίες (αξονική και καμπτικές).

Για τον έλεγχο της αξιοπιστίας της μεθόδου στον προσδιορισμό εντατικών μεγεθών, επιλέγεται ένα τυχαίο χωρικό δομικό σύστημα, το οποίο μορφώνεται με κοίλες διατομές υποστυλωμάτων πληρωμένες με σκυρόδεμα, καθώς και με τις αντίστοιχες τους ιδεατές, όπως προκύπτουν από την προτεινόμενη μεθοδολογία προσομοίωσης. Το σύστημα αυτό υπόκειται σε διάφορες φορτίσεις (τόσο με κατακόρυφα όσο και με οριζόντια φορτία, η τιμή των οποίων μεταβάλλεται). Μετά από καθολική ελαστική ανάλυση, λαμβάνονται τα εντατικά μεγέθη για τις δύο περιπτώσεις και συγκρίνονται μεταξύ τους. Οι αποκλίσεις που προκύπτουν κυμαίνονται από 0-3%, οι οποίες είναι εκτός πρακτικού ενδιαφέροντος και, κατά συνέπεια, δεν επηρεάζουν την αξιοπιστία της προτεινόμενης μεθοδολογίας.

## 7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Marinopoulou A, Balopoulos V, Kalfas C. Simulation of Partially Encased Composite Steel-Concrete Columns with Steel Columns. *Journal of Constructional Steel Research* 2007; 63:1058-65.
- [2] Eurocode 4. Design of Composite Steel and Concrete Structures, Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings.
- [3] Australia Standards AS4100. Steel structures. Sydney: Standards Australia; 1998.
- [4] ACI Committee 318. Building code requirements for structural concrete (ACI 318-95). Detroit: American Concrete Institute; 1995.
- [5] Australia Standards AS3600. Reinforced concrete structures. Sydney: Standards Australia; 1994.
- [6] Eurocode 3. Design of Steel Structures – Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings.

**Λίστα συμβόλων****A. Γεωμετρία σύμμικτης διατομής**

$b, h$  πλάτος και ύψος “κιβωτίου” διατομής ορθογωνικού σχήματος  
 $R$  εξωτερική διάμετρος κυκλικής σύμμικτης κοιλοδοκού

**B. Γεωμετρία χαλύβδινης διατομής**

$A_a, I_{ay}, I_{az}$  εμβαδόν και ροπές αδρανείας  
 $r_{ay}, r_{az}$  ακτίνες αδρανείας  
 $I_{ap}, r_{ap}$  πολική ροπή αδράνειας και ακτίνα αδράνειας  
 $\rho_a, \rho'_a$  αδιάστατο εμβαδόν χαλύβδινου μέρους,  $\rho_a = A_a/bh$  ή  
 $\rho_a = A_a/\pi R^2$ , και το συμπληρωματικό του,  $\rho'_a = 1 - \rho_a$   
 $\lambda_{ay}, \lambda_{az}$  αδιάστατες ακτίνες αδρανείας,  $\lambda_{ay} = 2r_{ay}/h$ ,  $\lambda_{az} = 2r_{az}/b$   
 $\lambda_{ap}$  αδιάστατη ακτίνα αδρανείας,  $\lambda_{ap} = 2r_{ap}/R$

**C. Γεωμετρία σκυροδέματος της σύμμικτης διατομής**

$A_c, I_{cy}, I_{cz}, I_{cp}$  εμβαδόν, καρτεσιανές ροπές αδρανείας, πολική ροπή αδρανείας

**D. Γεωμετρία ράβδων οπλισμού της σύμμικτης διατομής**

$b_s, h_s, r_s$  απόσταση από τους κεντροβαρικούς άξονες και ακτινική απόσταση  
 $\lambda_{sy}, \lambda_{sz}, \lambda_{sp}$  αδιάστατες αποστάσεις,  $\lambda_{sy} = 2h_s/h$ ,  $\lambda_{sz} = 2b_s/b$ ,  $\lambda_{sp} = 2r_s/R$   
 $A_s, I_{sy}, I_{sz}, I_{sp}$  εμβαδόν, καρτεσιανές ροπές αδρανείας, πολική ροπή αδρανείας  
 $\rho_s, \rho'_s$  ποσοστό οπλισμού,  $\rho_s = A_s/A_c$ , και “ποσοστό εγκιβωτισμού”,  
 $\rho'_s = 1 + \rho_s$

**E. Γεωμετρία της ιδεατής διατομής**

$b_1, h_1, b_2, h_2$  εξωτερικές και εσωτερικές διαστάσεις των ορθογωνικών διατομών  
 $t_b, t_h$  πάχη τοιχωμάτων των ορθογωνικών διατομών  
 $R_1, R_2$  εξωτερική και εσωτερική διάμετρος των κυκλικών κοιλοδοκών  
 $A_{comp}$  απαιτούμενο εμβαδόν της ιδεατής διατομής  
 $I_{y,comp}, I_{z,comp}$  Απαιτούμενη ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα yy και zz της ιδεατής διατομής, αντίστοιχα  
 $A_{fict}, I_{fict,y}, I_{fict,z}$  συνολικό εμβαδόν και ροπές αδρανείας της ιδεατής διατομής  
 $I_{fict,p}$  πολική ροπή αδρανείας της ιδεατής διατομής

$\beta_1, \eta_1$  αδιαστατοποιημένες διαστάσεις  $\beta_1 = b_1/b$ ,  $\eta_1 = h_1/h$

$\alpha$  ποσοστό διαστάσεων  $\alpha = b_2/b_1 = h_2/h_1 < 1$

$\gamma_1, \gamma_2$  αδιάστατες ακτίνες  $\gamma_1 = R_1/R$ ,  $\gamma_2 = R_2/R$

#### **F. Ιδιότητες υλικών**

$E_a$  μέτρο ελαστικότητας δομικού χάλυβα και ράβδων οπλισμού

$E_c$  μέτρο ελαστικότητας σκυροδέματος

$\psi_c$  λόγος των μέτρων ελαστικότητας σκυροδέματος και χάλυβα,  
 $\psi_c = E_c/E_a \leq 1$

#### **G. Αδιάστατες βοηθητικές ποσότητες**

$d_{x,i}^2, d_{y,i}^2, d_{z,i}^2$  αξονική, καμπτική ως προς τον ισχυρό και καμπτική ως προς τον ασθενή άξονα ακαμψία για ορθογωνικές (R) και κυκλικές κοιλοδοκούς (C)

## SIMULATION OF CONCRETE-FILLED STEEL TUBES WITH PURELY STEEL FICTITIOUS TUBES

**Anna A. Marinopoulou<sup>a</sup>, Christos N. Kalfas<sup>b</sup>, Victor D. Balopoulos<sup>b</sup>,  
Evangelos G. Galoussis<sup>c</sup>**

<sup>a</sup> Phd. Cand., MSc Civil Engineer

<sup>b</sup> Assistant Professor DUTH

<sup>c</sup> Professor DUTH

Steel Structures Laboratory DUTH

Xanthi, Greece

e-mail: [msslgroup@civil.duth.gr](mailto:msslgroup@civil.duth.gr)

### SUMMARY

This paper presents a method for simulating typical double-symmetrical composite steel-concrete tubular columns with fictitious purely steel sections, for the purposes of linear elastic analysis. The method deals with concrete-filled tubes (RHS, SHS and CHS). The fictitious section is a tube of the same shape but of different dimensions, which are obtained in closed form. The axial stiffness and the principal centroidal flexural stiffnesses of any actual composite section are matched exactly with those of the corresponding fictitious steel section. The accuracy and reliability of the proposed method is further established through its use in the evaluation of internal forces of steel-concrete composite structures in linear analysis. For the various structures, materials, and load cases considered herein, it is found that the relative errors in the calculated results are very small (of the order of 3% maximum), certainly within the acceptable limits for practical applications, especially in view of the inevitable ambiguity in the modeling of steel-concrete composite structures.