

Θλιβόμενες Δοκοί Μεταβλητής Διατομής Μέρος 1: Μέθοδος Γωνιών-Στροφής

Ε. Κ. Λαζαρίδου

Πολ. Μηχανικός, Μεταπτυχιακή φοιτήτρια Ε.Μ.Π.
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών
Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 157 80
Αθήνα, Ελλάδα
e-mail: eflazar@otenet.gr

Ι. Χ. Ερμόπουλος

Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών
Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 157 80
Αθήνα, Ελλάδα
e-mail: jermop@central.ntua.gr

1. ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή μελετώνται αξονικά θλιβόμενες δοκοί διαφόρων μορφών, οι οποίες αποτελούνται από δύο ή τρία επιμέρους τμήματα, μεταβλητής ή σταθερής διατομής. Για τις παραπάνω δοκούς διατυπώνονται οι εξισώσεις της μεθόδου γωνιών-στροφής που συνδέουν τα εντατικά μεγέθη των άκρων με τις αντίστοιχες υποχωρήσεις και γωνίες στροφής αυτών, μορφώνονται οι εκφράσεις των συντελεστών των εξισώσεων αυτών συναρτήσει των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της κάθε δοκού, και συντάσσονται, τέλος, τα διαγράμματα των συντελεστών αυτών συναρτήσει χαρακτηριστικών παραμέτρων. Ο νόμος μεταβολής της ροπής αδρανείας της διατομής των μεταβλητών τμημάτων των δοκών καλύπτει το σύνολο σχεδών των συνήθων απαντώμενων στην πράξη περιπτώσεων μεταλλικών φορέων.

2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η χρήση του χάλυβα σε εμπορικά πολυώροφα κτίρια ανταγωνίζεται, τα τελευταία χρόνια, τη χρήση του οπλισμένου σκυροδέματος. Λόγοι που οδήγησαν στην εξέλιξη αυτή, ήταν, μεταξύ άλλων, το πλεονέκτημα της ταχείας ανέγερσης ενός κτιρίου από χάλυβα, ότι οι αρχιτέκτονες δεν διστάζουν πλέον να προτείνουν λύσεις αξιοποιώντας τα πλεονεκτήματα του χάλυβα, και τέλος, ότι οι ερευνητές εισήγαγαν νέους και λεπτομερείς τρόπους μελέτης της αντοχής και ευστάθειας των κατασκευών αυτών, αλλά και απλές, αξιόπιστες και εύκολες συνδέσεις των μελών τους.

Η αλματώδης εξέλιξη της τεχνολογίας σε όλους τους τομείς, είχε ως αποτέλεσμα την εμφάνιση νέων απαιτήσεων και προδιαγραφών για τα σύγχρονα τεχνικά έργα. Βασική απαίτηση μεταξύ άλλων, ήταν η στέγαση κτιρίων μεγάλης επιφάνειας και μεγάλου ύψους

χωρίς την ύπαρξη ενδιάμεσων στηρίξεων. Οι νέοι φορείς έπρεπε να ικανοποιούν την παραπάνω απαίτηση με το μικρότερο δυνατό κόστος. Τη λύση έδωσε ο σχεδιασμός φερόντων στοιχείων μεταβλητής διατομής που συνδυάζουν αυξημένη φέρουσα ικανότητα με ελάχιστο κατά το δυνατό βάρος. Οι παραπάνω φορείς ωστόσο, συνδέονται με προβλήματα ανάλυσης, ιδιαίτερα σε ευστάθεια, που γίνονται εντονότερα, όσο τα μέλη γίνονται λεπτότερα και ελαφρότερα.

Η μελέτη αξονικά θλιβομένων ράβδων μεταβλητής διατομής είχε αρχίσει από την αρχή του 20^{ου} αιώνα και δόθηκαν ακριβείς ή προσεγγιστικές λύσεις για ορισμένες απλές μορφές και συνεχίζεται μέχρι σήμερα [1-8].

Στην εργασία αυτή μελετώνται αξονικά θλιβόμενες δοκοί μεταβλητής διατομής διαφόρων μορφών. Οι υπό μελέτη δοκοί, έξι στο σύνολό τους (Σχ. 1), αποτελούνται από δύο ή τρία επιμέρους τμήματα, μεταβλητής ή σταθερής διατομής, τα οποία διέπονται από τον ακόλουθο νόμο μεταβολής της ροπής αδρανείας: «Η ροπή αδρανείας I_x σε τυχούσα θέση ενός μέλους, μεταβάλλεται ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης της θέσης αυτής από την αρχή των αξόνων (που συμπίπτει με το σημείο τομής των αξόνων του άνω και κάτω πέλματος της διατομής)». Ο νόμος αυτός αντιστοιχεί είτε σε πολυμελείς μεταλλικές διατομές (δικτυωτή ή πλαισιακή μορφή), με σταθερό εμβαδό κατά μήκος του άξονά τους, όπου όλο το υλικό είναι συγκεντρωμένο στις τέσσερις γωνίες ή στις δύο πλευρές της διατομής, είτε, με ικανοποιητική ακρίβεια, σε μονομελείς διατομές (π.χ. διπλά ταυ) όπου η συμμετοχή του κορμού στη ροπή αδρανείας είναι κατά κανόνα πολύ μικρή. Τα επιμέρους τμήματα της κάθε δοκού θεωρούνται κατά την επίλυση, διαφορετικού μήκους και διαφορετικής μεταβλητότητας.

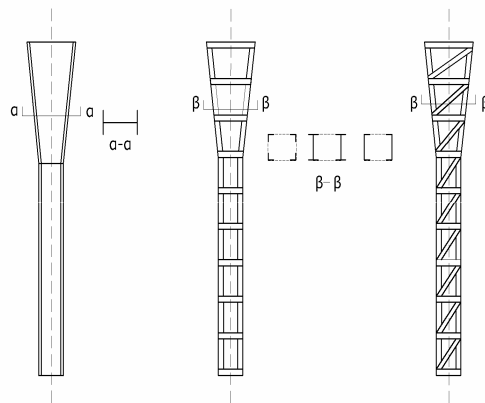
Για τις δοκούς, που υπόκεινται σε αξονικό θλιπτικό φορτίο, διατυπώνονται οι εξισώσεις της μεθόδου γωνιών-στροφής οι οποίες συνδέουν τα εντατικά μεγέθη των άκρων με τις αντίστοιχες υποχωρήσεις και γωνίες στροφής αυτών, υπολογίζονται οι αντίστοιχοι συντελεστές συναρτήσεων των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της δοκού, και συντάσσονται διαγράμματα των υπολογισθέντων συντελεστών της μεθόδου γωνιών-στροφής για διάφορες τιμές των χαρακτηριστικών παραμέτρων. Με τα διαγράμματα αυτά αφ' ενός γίνεται σαφής η επιρροή των παραμέτρων στους συντελεστές της μεθόδου, και αφ' ετέρου γίνεται εύκολα ο προσδιορισμός των τιμών των συντελεστών της μεθόδου για τις αναλυόμενες ράβδους.

3. ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

E	Μέτρο ελαστικότητας
f_i	παράμετροι ($i = 0 \div 4$)
G_i	$= J_i + 1$
$g_1, g_2, \bar{g}_1, \bar{g}_2$	Συντελεστές μεθόδου γωνιών-στροφής ράβδων μεταβλητής διατομής
I_0, I_x, I_1, I_2	Ροπές αδρανείας
J_i	$= L_{ci} / a_i$
$L_{c1}, L_{c2}, L_{c3}, L_{c4}$	Μήκη ράβδων
M, V	Καμπτική ροπή και τέμνουσα δύναμη
P	Αξονική θλιπτική δύναμη
R	$= L_{c2} / L_{c1}$
$u_1, u_2, \bar{u}_1, \bar{u}_2$	Συντελεστές μεθόδου γωνιών-στροφής ράβδων μεταβλητής διατομής
a	απόσταση

\bar{a}_i, \bar{A}_i	Συντελεστές μεθόδου γωνιών-στροφής ράβδων μεταβλητής διατομής
a_f, a_n	Συντελεστές μεθόδου γωνιών-στροφής για ράβδους σταθερής διατομής
β, β_1	$= \sqrt{\frac{PL_{ci}^2}{EI_o}}$ αδιάστατο αξονικό φορτίο μέλους σταθερής διατομής
δ, θ	Υποχωρήσεις και γωνίες στροφής
μ_i	$= \sqrt{\frac{Pa_i^2}{EI_o} - \frac{1}{4}}$
ϕ_f, ϕ_n	Παράμετροι μεθόδου γωνιών-στροφής ράβδων σταθερής διατομής

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ	ΜΟΡΦΗ ΜΕΛΟΥΣ
1	
2	
3	
4	
5	
6	



Σχ. 1 Οι έξι υπό μελέτη περιπτώσεις και τυπική μορφή μελών

4. ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2

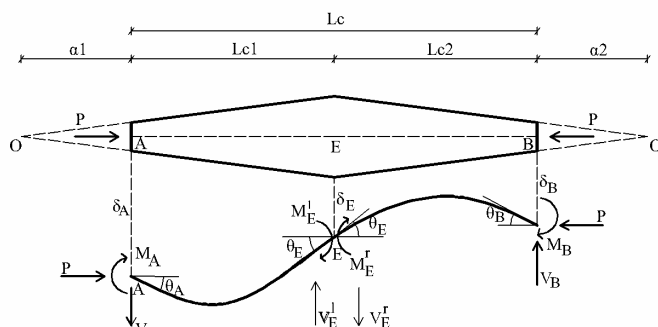
Ενδεικτικά και για να κατανοηθεί η διαδικασία ανάλυσης, περιγράφεται στη συνέχεια η Περίπτωση 2. Στο Σχ. 2 φαίνεται η αντίστοιχη υπό μελέτη αξονικά θλιβόμενη δοκός μεταβλητής διατομής (βλέπε Σχ. 1), υποκείμενη σε υποχωρήσεις και στροφές κατά τα δύο άκρα της Α και Β. Αποτελείται από τα επιμέρους τμήματα ΑΕ και ΕΒ, τα οποία είναι μεταβλητής διατομής (όπως στην Περίπτωση 1).

Ο νόμος μεταβολής της ροπής αδρανείας για κάθε τμήμα περιγράφεται από τη σχέση:

$$I_X = I_0 \left(\frac{x}{a} \right)^2 \quad (1)$$

σύμφωνα με την οποία η ροπή αδρανείας σε απόσταση x από την αρχή των αξόνων O , είναι ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης αυτής.

Κατά τη μελέτη, τα επιμέρους τμήματα ΑΕ και ΕΒ θεωρούνται, χάριν γενικότητας, διαφορετικού μήκους και διαφορετικής μεταβλητότητας. Για τα τμήματα αυτά, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις της μεθόδου γωνιών-στροφής [7]:



Σχ. 2 Θλιβόμενη δοκός Περίπτωσης 2

Τμήμα ΑΕ

$$M_A = \frac{2EI_0}{L_{c1}} \left[\frac{\bar{a}_1}{G_1^2} \theta_A + \frac{\bar{a}_2}{G_1^2} \theta_E + \frac{(\bar{a}_1 + \bar{a}_2)}{G_1^2} \left(\frac{\delta_A - \delta_E}{L_{c1}} \right) \right] \quad (2)$$

$$M_E^l = \frac{2EI_0}{L_{c1}} \left[\frac{\bar{a}_3}{G_1^2} \theta_A + \frac{\bar{a}_4}{G_1^2} \theta_E + \frac{(\bar{a}_3 + \bar{a}_4)}{G_1^2} \left(\frac{\delta_A - \delta_E}{L_{c1}} \right) \right] \quad (3)$$

$$V_E^l = \frac{2EI_0}{L_{c1}^2} \left[\frac{(\bar{a}_1 + \bar{a}_3)}{G_1^2} \theta_A + \frac{(\bar{a}_2 + \bar{a}_4)}{G_1^2} \theta_E + \frac{(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \bar{a}_4)}{G_1^2} \left(\frac{\delta_A - \delta_E}{L_{c1}} \right) \right] - \frac{\beta^2 EI_0}{L_{c1}^3} (\delta_A - \delta_E) \quad (4)$$

όπου, οι συντελεστές \bar{a}_i ($i=1 \div 4$) δίνονται από τη βιβλιογραφία [7].

Τμήμα ΕΒ

$$M_E^r = \frac{2EI_0}{L_{c1}} \left[\frac{\bar{A}_3}{RG_2^2} \theta_B + \frac{\bar{A}_4}{RG_2^2} \theta_E + \frac{(\bar{A}_3 + \bar{A}_4)}{R^2 G_2^2} \left(\frac{\delta_E - \delta_B}{L_{c1}} \right) \right] \quad (5)$$

$$M_B = \frac{2EI_0}{L_{c1}} \left[\frac{\bar{A}_1}{RG_2^2} \theta_B + \frac{\bar{A}_2}{RG_2^2} \theta_E + \frac{(\bar{A}_1 + \bar{A}_2)}{R^2 G_2^2} \left(\frac{\delta_E - \delta_B}{L_{c1}} \right) \right] \quad (6)$$

$$V_E^r = \frac{2EI_0}{L_{c1}^2} \left[\frac{(\bar{A}_1 + \bar{A}_3)}{R^2 G_2^2} \theta_B + \frac{(\bar{A}_2 + \bar{A}_4)}{R^2 G_2^2} \theta_E + \frac{(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 + \bar{A}_4)}{R^3 G_2^2} \left(\frac{\delta_E - \delta_B}{L_{c1}} \right) \right] - \frac{\beta^2 EI_0}{L_{c1}^3} \frac{1}{R} (\delta_E - \delta_B) \quad (7)$$

όπου, οι συντελεστές \bar{A}_i ($i=1 \div 4$) προκύπτουν μέσω αντικατάστασης των \bar{a}_i με \bar{A}_i .
Οι συνθήκες ισορροπίας στο σημείο Ε είναι:

$$M_E^l = -M_E^r \quad (8)$$

$$V_E^l = V_E^r \quad (9)$$

Από τις εξ. (8) και (9), βάσει των προηγούμενων, προκύπτουν τα μεγέθη θ_E, δ_E , τα οποία τίθενται στις σχέσεις (2) και (6), οπότε, μετά τις πράξεις, προκύπτουν τελικώς οι σχέσεις της μεθόδου γωνιών στροφής για τη ράβδο ΑΒ της Περίπτωσης 2, ως ακολούθως:

$$M_A = \frac{2EI_0}{L_c} \left[u_1 \theta_A + u_2 \theta_B + (u_1 + u_2) \left(\frac{\delta_A - \delta_B}{L_c} \right) \right] \quad (10)$$

$$M_B = \frac{2EI}{L_c} \theta \left[g_1 \theta_A + g_2 \theta_B + (g_1 + g_2) \left(\frac{\delta_A - \delta_B}{L_c} \right) \right] \quad (11)$$

όπου

$$u_1 = (1+R) \frac{I}{G_1^2} \left[\bar{a}_1 + R_3 \bar{a}_2 - 2S_3 (\bar{a}_1 + \bar{a}_2) \right] \quad (12)$$

$$u_2 = (1+R) \frac{I}{G_2^2} \left[R_3 \frac{I}{R} \bar{A}_3 + 2S_3 \frac{I}{R^2} (\bar{A}_1 + \bar{A}_3) \right] \quad (13)$$

$$g_1 = (1+R) \left(\frac{I}{R} \right) \frac{I}{G_1^2} \left[\bar{a}_3 R_4 - 2(\bar{a}_1 + \bar{a}_3) S_4 \right] \quad (14)$$

$$g_2 = (1+R) \left(\frac{I}{R} \right) \frac{I}{G_2^2} \left[\bar{A}_1 + R_4 \frac{I}{R} \bar{A}_3 + 2S_4 \frac{I}{R^2} (\bar{A}_1 + \bar{A}_3) \right] \quad (15)$$

$$R = \frac{L_{c2}}{L_{c1}} \quad (16)$$

Οι μεταβλητές $R_1 \div R_4$ και $S_1 \div S_4$ δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$R_1 = - \left[\frac{\bar{a}_4}{G_1^2} + \frac{\bar{A}_4}{R G_2^2} \right] \quad (17)$$

$$R_2 = \left[\frac{(\bar{a}_3 + \bar{a}_4)}{G_1^2} - \frac{(\bar{A}_3 + \bar{A}_4)}{R^2 G_2^2} \right] \quad (18)$$

$$S_1 = -2 \left[\frac{(\bar{a}_2 + \bar{a}_4)}{G_1^2} - \frac{(\bar{A}_2 + \bar{A}_4)}{R^2 G_2^2} \right] = -2R_2 \quad (19)$$

$$S_2 = \left[\frac{2(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \bar{a}_4)}{G_1^2} + \frac{2(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 + \bar{A}_4)}{R^3 G_2^2} - \beta^2 \left(1 + \frac{I}{R} \right) \right] \quad (20)$$

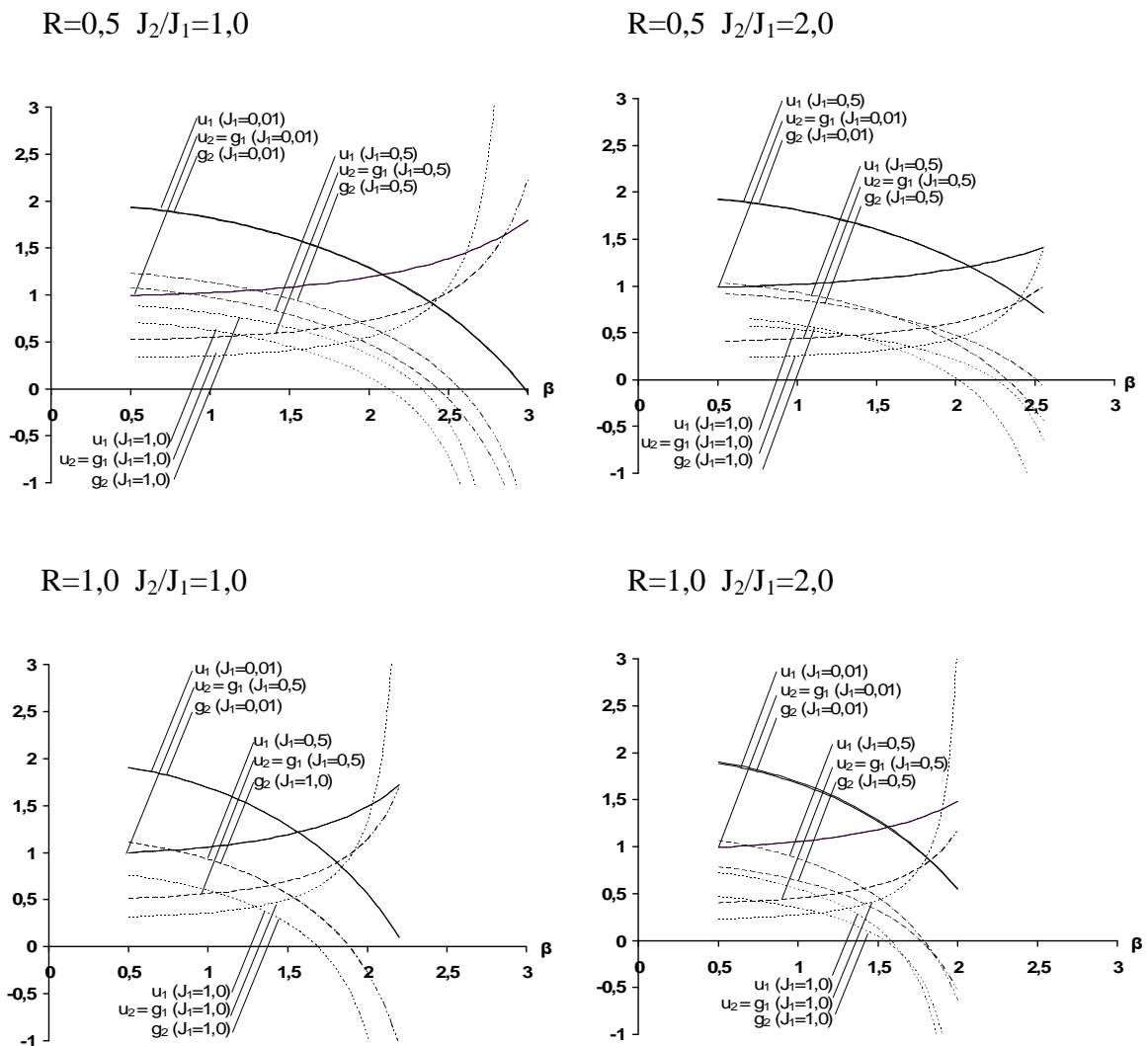
$$R_3 = \frac{\frac{\bar{a}_3}{G_1^2} S_2 + \frac{(\bar{a}_1 + \bar{a}_3)}{G_1^2} S_1}{R_1 S_2 - R_2 S_1} \quad (21)$$

$$R_4 = \frac{\frac{\bar{A}_2}{G_2^2} S_2 - \frac{(\bar{A}_1 + \bar{A}_2)}{R G_2^2} S_1}{R_1 S_2 - R_2 S_1} \quad (22)$$

$$S_3 = \frac{-\bar{a}_3 R_2 + \frac{(\bar{a}_1 + \bar{a}_3)}{G_1^2} R_1}{R_1 S_2 - R_2 S_1} \quad (23)$$

$$S_4 = \frac{\frac{\bar{A}_2}{G_2^2} R_2 - \frac{(\bar{A}_1 + \bar{A}_2)}{R G_2^2} R_1}{R_1 S_2 - R_2 S_1} \quad (24)$$

Με ανάλογο τρόπο αντιμετωπίζονται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις του Σχ. 1, για τις οποίες υπολογίζονται οι αντίστοιχες εξισώσεις. Βάσει των σχέσεων που διατυπώθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, καταρτίζεται πρόγραμμα στον Η/Υ, με τη βοήθεια του οποίου συντάσσονται τα διαγράμματα των συντελεστών της μεθόδου γωνιών-στροφής για τις διάφορες περιπτώσεις δοκών και για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων που υπεισέρχονται στις εξισώσεις των συντελεστών.



Σχ. 3 Συντελεστές u_1 , $u_2 = g_1$ και g_2 για τη δοκό της Περίπτωσης 2 συναρτήσει του αδιάστατου αξονικού φορτίου β , για διάφορες τιμές των παραμέτρων $R = L_{c2}/L_{c1}$, J_2/J_1 , $J_1 = L_{c1}/a_1$

Ενδεικτικά διαγράμματα φαίνονται στο Σχ. 3. Σημειώνεται τέλος, ότι οι σχέσεις της μεθόδου γωνιών-στροφής που διατυπώθηκαν εδώ, είναι παρόμοιας μορφής με τις γνωστές σχέσεις, οι οποίες αναφέρονται σε ράβδους σταθερής διατομής. Όπως προκύπτει από τα

διαγράμματα αυτά, η μεταβλητότητα των διατομών επηρεάζει σημαντικά τους αντίστοιχους συντελεστές της μεθόδου γωνιών-στροφής, και πρέπει επομένως να λαμβάνεται υπόψη κατά τη μελέτη τους.

5. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Timoshenko S.P and Gere J.M *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill Book Co, New York, 1961.
2. Horne M.R and Merchant W., *The Stability of Frames*, Pengamon Press, Oxford, 1965.
3. Krynicki E.J and Mazurkiewicz Z.E., Frames of Solid Bars of Varying Cross Sections, *J. of Str. Division*, ASCE, N^o ST4, Aug. 1964, pp.145-174.
4. Just D.J., Plane Frameworks of Tapering Box and I-section, *J. of Str. Division*, ASCE, STI, Jan. 1977, pp. 71-86.
5. Galea Y., Flambement des Poteaux a inertie variable, *Construction Metallique*, No 1, 1981, pp. 21-46.
6. Karabalis D.L. and Beskos D.E., Static, Dynamic and Stability Analysis of Structures Composed of Tapered Beams, *Computers and Structures*, Vol. 16, No 6, 1983, pp.731-748.
7. Ermopoulos J., Slope-Deflection method and bending of tapered bars under stepped loads, *J. of Constr. Steel Research*, 11, 1988, pp. 121-141.
8. Ι.Χ.Ερμόπουλος, Μέθοδος Γωνιών-Στροφής και Θεμελιώδεις Ροπές σε Θλιβόμενες Ράβδους Μεταβλητής Διατομής, *Τεχν. Χρον.Επιστ. Εκδ. ΤΕΕ*, I, τεύχος 3 1996, σελ. 51-60.
9. Samir Z. Al-Sadder, Exact expressions for stability functions of a general non-prismatic beam-column member, *J. of Constr. Steel Research*, Vol 60, No 11, 2004 pp. 1561-1584.

**Tapered beam-columns under compression
Part 1: Slope-deflection method**

E. K. Lazaridou

Civil Engineer, Postgraduate student at N.T. University of Athens
School of Civil Engineering, Laboratory of Metal Structures
9 Iroon Politechneiou str., 157 80
Athens, Greece
e-mail: eflazar@otenet.gr

J. Ch. Ermopoulos

Professor N.T. University of Athens
School of Civil Engineering, Laboratory of Metal Structures
9 Iroon Politechneiou str., 157 80
Athens, Greece
e-mail: jermop@central.ntua.gr

SUMMARY

In this paper, axially compressed tapered bars of various shapes, which consist of two or three parts of varying or constant cross-section, are studied. The law of moment of inertia variation that has been used, applies mainly to members of steel structures. The slope-deflection method equations for these bars, and their factors' expressions, as a function of various geometrical characteristics of each bar are derived. The results are also presented in graphic form, in order to make the use of this kind of members easier.