

Θλιβόμενες Δοκοί Μεταβλητής Διατομής Μέρος 3: Κρίσιμα Φορτία και Ισοδύναμα Μήκη Λυγισμού

Ε. Κ. Λαζαρίδου

Πολ. Μηχανικός, Μεταπτυχιακή φοιτήτρια Ε.Μ.Π.
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών
Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 157 80
Αθήνα, Ελλάδα
e-mail: eflazar@otenet.gr

Ι. Χ. Ερμόπουλος

Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών
Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 157 80
Αθήνα, Ελλάδα
e-mail: jermop@central.ntua.gr

1. ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή μελετώνται αξονικά θλιβόμενες δοκοί διαφόρων μορφών, οι οποίες αποτελούνται από δύο ή τρία επιμέρους τμήματα, μεταβλητής ή σταθερής διατομής. Διατυπώνονται οι εξισώσεις ισορροπίας θλιβομένων μελών των παραπάνω δοκών στην παραμορφωμένη κατάσταση, με βάση τη μέθοδο γωνιών-στροφής όπως αυτή ισχύει για τις δοκούς αυτές. Η προσομοίωση είναι η ίδια με αυτή που εισάγεται για μέλη σταθερής διατομής από τον Ευρωκώδικα 3. Οι εξισώσεις αυτές επιλύονται, και υπολογίζονται τα κρίσιμα φορτία λυγισμού και οι αντίστοιχοι συντελεστές ισοδύναμου μήκους λυγισμού αυτών, για διάφορες τιμές των χαρακτηριστικών παραμέτρων που υπεισέρχονται στο πρόβλημα. Στο τέλος, παρατίθενται ενδεικτικά διαγράμματα με τη βοήθεια των οποίων καθίσταται εύκολος και ταχύς ο προσδιορισμός της φέρουσας ικανότητας των παραπάνω σύνθετων δοκών μεταβλητής διατομής.

2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κατά το σχεδιασμό και την ανάλυση των κατασκευών, ένας βασικός έλεγχος που πρέπει να πραγματοποιείται είναι ο έλεγχος της ευστάθειας αυτών. Στις μεταλλικές κατασκευές ιδιαίτερα, όπου λόγω της μεγάλης αντοχής τους χρησιμοποιούνται εύκαμπτα στοιχεία ως μέλη, ο έλεγχος της ευστάθειας των μελών κατά τη διαστασιολόγηση είναι πολλές φορές ο κρισιμότερος. Για την ακριβή διεξαγωγή του ελέγχου ευστάθειας ενός φορέα, πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και η επιρροή των αξονικών δυνάμεων των διαφόρων μελών του. Η διαδικασία αυτή ανάλυσης είναι πολύπλοκη και χρονοβόρα και συνεπώς μη επιθυμητή στην καθημερινή πράξη.

Προκειμένου να γίνει απλοποίηση της διαδικασίας αυτής, προτάθηκαν κατά το παρελθόν από διάφορους ερευνητές, ορισμένες προσεγγιστικές μέθοδοι, βάσει των οποίων επιτυγχάνεται με ικανοποιητική ακρίβεια και συντομία ο έλεγχος αυτός. Στις μεθόδους αυτές, προσδιορίζονται, συναρτήσει των γεωμετρικών μεγεθών του φορέα, οι συντελεστές ισοδύναμου μήκους λυγισμού των μελών του και στη συνέχεια η αντίστοιχη φέρουσα ικανότητα αυτών. Οι προσεγγιστικές αυτές μέθοδοι αναφέρονται κυρίως σε μέλη με σταθερή διατομή και η πλέον εν χρήσει είναι αυτή του Wood [1 και 2], μέσω διαγραμμάτων, τα οποία αναφέρονται σε μέλη με αμετάθετα ή μεταθετά άκρα. Η μέθοδος αυτή έχει υιοθετηθεί από διάφορους σύγχρονους κανονισμούς, όπως ο EC3 [3], ο BS 5950 [4], το DIN18800 [5] κλπ, ενώ έχει προταθεί και μέθοδος υπολογισμού μέσω νομογραφημάτων.

Ο Ευρωκώδικας 3 [3], ο οποίος αναφέρεται στο σχεδιασμό δομικών έργων από χάλυβα, σχετικά με το θέμα αυτό ορίζει: «Θα πρέπει να χρησιμοποιείται ένα ισοδύναμο μήκος λυγισμού, προκειμένου να συσχετίσει την αντοχή σε λυγισμό ενός μέλους μεταβλητής διατομής με αυτήν ενός μέλους σταθερής διατομής, για τις ίδιες συνθήκες φόρτισης και συγκεκριμένης μεθοδολογίας».

Στην εργασία αυτή μελετώνται αξονικά θλιβόμενες δοκοί μεταβλητής διατομής διαφόρων μορφών. Οι υπό μελέτη δοκοί, έξι στο σύνολό τους (Σχ. 1), αποτελούνται από δύο ή τρία επιμέρους τμήματα, μεταβλητής ή σταθερής διατομής, τα οποία διέπονται από τον ακόλουθο νόμο μεταβολής της ροπής αδρανείας: «Η ροπή αδρανείας I_x σε τυχούσα θέση ενός μέλους, μεταβάλλεται ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης της θέσης αυτής από την αρχή των αξόνων (που συμπίπτει με το σημείο τομής των αξόνων του άνω και κάτω πέλματος της διατομής)». Τα επιμέρους τμήματα της κάθε δοκού θεωρούνται κατά την επίλυση, διαφορετικού μήκους και διαφορετικής μεταβλητότητας.

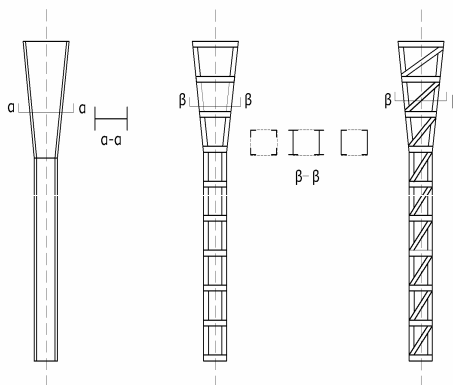
Ο νόμος αυτός αντιστοιχεί είτε σε πολυμελείς μεταλλικές διατομές (δικτυωτή ή πλαισιακή μορφή), με σταθερό εμβαδό κατά μήκος του άξονά τους, όπου όλο το υλικό είναι συγκεντρωμένο στις τέσσερις γωνίες ή στις δύο πλευρές της διατομής, είτε, με ικανοποιητική ακρίβεια, σε μονομελείς διατομές (π.χ. διπλά ταυ) όπου η συμμετοχή του κορμού στη ροπή αδρανείας είναι κατά κανόνα πολύ μικρή (Σχ. 1). Τα επιμέρους τμήματα της κάθε δοκού θεωρούνται κατά την επίλυση, διαφορετικού μήκους και διαφορετικής μεταβλητότητας. Για τις δοκούς αυτές, διατυπώνονται οι εξισώσεις ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση με βάση τη μέθοδο γωνιών στροφής. Η προσομοίωση είναι ίδια με αυτή που εισάγεται για μέλη σταθερής διατομής από τον Ευρωκώδικα 3. Οι εξισώσεις ισορροπίας επιλύονται, και υπολογίζονται τα κρίσιμα φορτία, καθώς και οι αντίστοιχοι συντελεστές ισοδύναμου μήκους λυγισμού αυτών. Παρατίθενται τέλος, διαγράμματα σε παρόμοια μορφή με τον EC3, με τη βοήθεια των οποίων καθίσταται εύκολος και ταχύς ο προσδιορισμός της φέρουσας ικανότητας ράβδου μεταβλητής διατομής.

3. ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

E	Μέτρο ελαστικότητας
$g_1, g_2, \bar{g}_1, \bar{g}_2$	Συντελεστές μεθόδου γωνιών-στροφής ράβδων μεταβλητής διατομής
I_0, I_x, I_A, I_B	Ροπές αδρανείας
J_i	$= L_{ci} / a_i$
K_i	Σχετικές ακαμψίες ($i=1 \div 4$)

- $k = \frac{\pi}{\beta_m}$ Συντελεστής ισοδύναμου μήκους λυγισμού
- $L_{c1}, L_{c2}, L_{c3}, L_{c4}$ Μήκη ράβδων
- M, V Καμπτική ροπή και τέμνουσα δύναμη
- n_1, n_2 Συντελεστές κατανομής
- P Αξονική θλιπτική δύναμη
- P_{cr} Κρίσιμο φορτίο ράβδου AB
- $R = L_{c2}/L_{c1}$
- $u_1, u_2, \bar{u}_1, \bar{u}_2$ Συντελεστές μεθόδου γωνιών-στροφής ράβδων μεταβλητής διατομής
- a απόσταση
- $\beta, \beta_1 = \sqrt{\frac{PL_{ci}^2}{EI_o}}$ αδιάστατο αξονικό φορτίο μέλους σταθερής διατομής
- δ, θ Υποχωρήσεις και γωνίες στροφής

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ	ΜΟΡΦΗ ΜΕΛΟΥΣ
1	
2	
3	
4	
5	
6	



Σχ. 1: Οι έξι υπό μελέτη περιπτώσεις και τυπική μορφή μελών

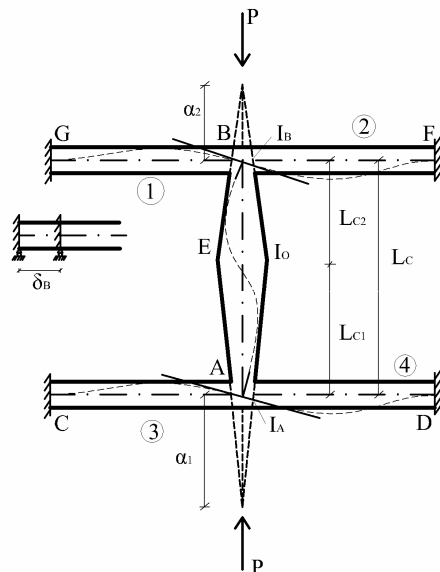
4. ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2

Ενδεικτικά και για να κατανοηθεί η διαδικασία ανάλυσης, περιγράφεται στη συνέχεια η Περίπτωση 2. Στο Σχ. 2 φαίνεται η αντίστοιχη υπό μελέτη αξονικά θλιβόμενη δοκός μεταβλητής διατομής (βλέπε Σχ. 1) που αποτελείται από δύο επιμέρους τμήματα, τα ΑΕ και ΕΒ, μεταβλητής ακαμψίας.

Ο νόμος μεταβολής της ροπής αδρανείας για κάθε τμήμα περιγράφεται από τη σχέση:

$$I_x = I_0 \left(\frac{x}{a} \right)^2 \tag{1}$$

σύμφωνα με την οποία η ροπή αδρανείας σε απόσταση x από την αρχή των αξόνων O , είναι ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης αυτής.



Σχ. 2: Θλιβόμενη ράβδος Περίπτωσης 2 με αμετάθετα και μεταθετά άκρα

Η μεταβλητότητα των επιμέρους τμημάτων ΑΕ και ΕΒ της δοκού ΑΒ περιγράφεται από τους συντελεστές $J_1 = \frac{L_{c1}}{a_1}$ και $J_2 = \frac{L_{c2}}{a_2}$, η σχέση μεταξύ των μηκών τους καθορίζεται από

τη μεταβλητή $R = \frac{L_{c2}}{L_{c1}}$ και οι ροπές αδρανείας στα άκρα τους είναι $I_A = I_o (J_1 + 1)^{-2}$ και

$I_B = I_o (J_2 + 1)^{-2}$ αντίστοιχα.

Σύμφωνα με τη μέθοδο γωνιών-στροφής, για τις δοκούς του Σχήματος 2 ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$M_{BG} = \frac{4EI_1}{L_1} \theta_B \quad (2)$$

$$M_{BF} = \frac{4EI_2}{L_2} \theta_B \quad (3)$$

$$M_{AC} = \frac{4EI_3}{L_3} \theta_A \quad (4)$$

$$M_{AD} = \frac{4EI_4}{L_4} \theta_A \quad (5)$$

$$M_{AB} = \frac{2EI_o}{L_c} \left[u_1 \theta_A + u_2 \theta_B + (u_1 + u_2) \frac{\delta_B}{L_c} \right] \quad (6)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI_o}{L_c} \left[g_1 \theta_A + g_2 \theta_B + (g_1 + g_2) \frac{\delta_B}{L_c} \right] \quad (7)$$

$$V_{AB} = V_{BA} = \frac{2EI_o}{L_c^2} \left[(u_1 + g_1) \theta_A + (u_2 + g_2) \theta_B + (u_1 + u_2 + g_1 + g_2) \frac{\delta_B}{L_c} \right] - P \frac{\delta_B}{L_c} \quad (8)$$

όπου

$$P = \frac{\beta^2 EI_0}{L_{c1}^2} = \frac{\beta^2 EI_0}{L_c^2} \frac{L_c^2}{L_{c1}^2} = \frac{\beta^2 EI_0}{L_c^2} (1+R)^2 \quad (9)$$

Το δ_B εκφράζει τη σχετική μετατόπιση των άκρων Α και Β. Οι συντελεστές u_i και g_i των σχέσεων της μεθόδου γωνιών-στροφής για τη ράβδο ΑΒ έχουν υπολογισθεί σε προηγούμενη εργασία, συναρτήσει των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της και του αξονικού φορτίου Ρ.

Τέλος οι συντελεστές κατανομής n_1 και n_2 δίνονται από τις σχέσεις:

$$n_1 = \frac{K_B}{K_B + K_1 + K_2} \quad (10)$$

$$n_2 = \frac{K_A}{K_A + K_3 + K_4} \quad (11)$$

όπου

$$K_A = \frac{I_A}{L_c} = \frac{I_0}{L_c} (J_2 + 1)^{-2} \quad (12)$$

και

$$K_i = \frac{I_i}{L_i} \quad (13)$$

είναι η σχετική ακαμψία αναφοράς της δοκού ΑΒ.

Η εξίσωση λυγισμού για αμετάθετα άκρα προκύπτει ως εξής:

Από την ισορροπία στους κόμβους Α και Β λαμβάνουμε:

$$\Sigma M_A = 0 \quad (14)$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad (15)$$

Επίσης στην περίπτωση των αμετάθετων άκρων ισχύει

$$\delta_B = 0 \quad (16)$$

Η εξίσωση (14) συναρτήσει των σχέσεων (4)-(6), (16) και (13) γίνεται, μετά τις πράξεις:

$$\theta_A \left[K_A (J_1 + 1)^2 u_1 + 2K_3 + 2K_4 \right] + \theta_B \left[K_A (J_1 + 1)^2 u_2 \right] = 0 \quad (17)$$

Αντίστοιχα, η εξίσωση (15) συναρτήσει των (2), (3), (7), (16) και (13) γίνεται

$$\theta_A \left[K_B (J_2 + 1)^2 g_1 \right] + \theta_B \left[K_B (J_2 + 1)^2 g_2 + 2K_1 + 2K_2 \right] = 0 \quad (18)$$

Προκειμένου το σύστημα των εξισώσεων (17) και (18) να έχει λύση, πρέπει η ορίζουσα του να είναι ίση με το μηδέν. Δηλαδή

$$\begin{aligned} & \left[K_A (J_1 + 1)^2 u_1 + 2K_3 + 2K_4 \right] \left[K_B (J_2 + 1)^2 g_2 + 2K_1 + 2K_2 \right] - \\ & - \left[K_A (J_1 + 1)^2 u_2 \right] \left[K_B (J_2 + 1)^2 g_1 \right] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Από την παραπάνω, μετά από πράξεις και συναρτήσεις των σχέσεων (10) και (11) προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση λυγισμού για τη δοκό AB

$$u_2^2 - \left[2 \left(\frac{1}{n_2} - 1 \right) (J_1 + 1)^{-2} + u_1 \right] \left[2 \left(\frac{1}{n_1} - 1 \right) (J_2 + 1)^{-2} + g_2 \right] = 0 \quad (20)$$

Η εξίσωση λυγισμού για μεταθετά άκρα προκύπτει με αντίστοιχη διαδικασία από τις εξισώσεις (1)-(15) και με τους παρακάτω πρόσθετους περιορισμούς:

$$\delta_B \neq 0 \quad (21)$$

$$V_{AB} = 0 \quad (22)$$

και είναι η ακόλουθη:

$$\left[u_2 + \frac{(u_1 + u_2)(g_1 + g_2)}{\frac{\beta^2(1+R)^2}{2} - (u_1 + u_2 + g_1 + g_2)} \right]^2 - \left[2 \left(\frac{1}{n_2} - 1 \right) (J_1 + 1)^{-2} + u_1 + \frac{(u_1 + u_2)^2}{\frac{\beta^2(1+R)^2}{2} - (u_1 + u_2 + g_1 + g_2)} \right] \left[2 \left(\frac{1}{n_1} - 1 \right) (J_2 + 1)^{-2} + g_2 + \frac{(g_1 + g_2)^2}{\frac{\beta^2(1+R)^2}{2} - (u_1 + u_2 + g_1 + g_2)} \right] = 0 \quad (23)$$

Με βάση τις εξισώσεις λυγισμού, και χρησιμοποιώντας επαναληπτική διαδικασία, υπολογίζονται για διάφορες τιμές των χαρακτηριστικών παραμέτρων του προβλήματος της κάθε περίπτωσης τα αντίστοιχα κρίσιμα φορτία για αμετάθετα και μεταθετά άκρα. Κατόπιν, από την εξίσωση του Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{(kL_c)^2} \quad (24)$$

σε συνδυασμό με τη σχέση που διέπει κατά περίπτωση το αδιάστατο αξονικό φορτίο, προκύπτει ο συντελεστής ισοδύναμου μήκους λυγισμού k της δοκού AB:

$$k = \frac{\pi}{\beta} \quad (25)$$

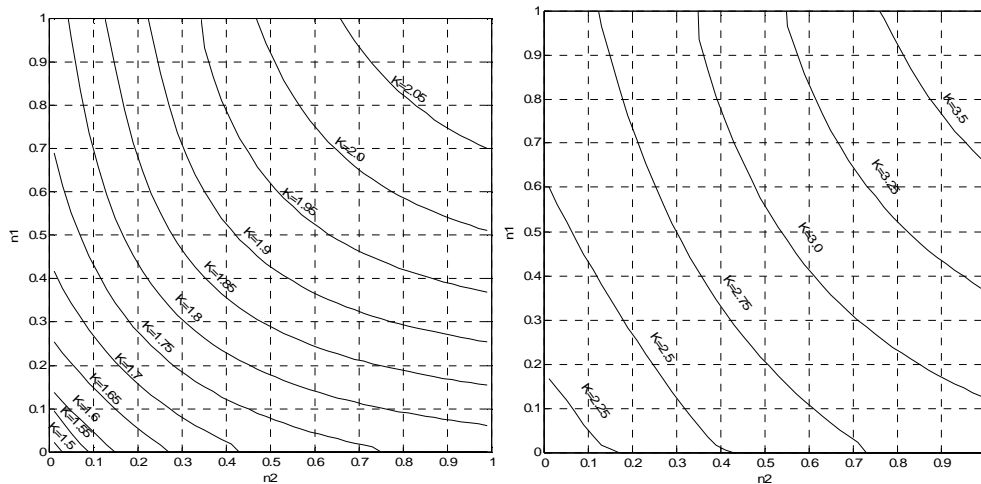
Με ανάλογο τρόπο αντιμετωπίζονται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις του Σχ. 1, για τις οποίες υπολογίζονται οι αντίστοιχες εξισώσεις λυγισμού.

Καταρτίζεται τέλος πρόγραμμα στον Η/Υ, με τη βοήθεια του οποίου συντάσσονται τα διαγράμματα των συντελεστών του ισοδύναμου μήκους λυγισμού της κάθε ράβδου, για αμετάθετα και μεταθετά άκρα, συναρτήσεις των συντελεστών κατανομής n_1 και n_2 και

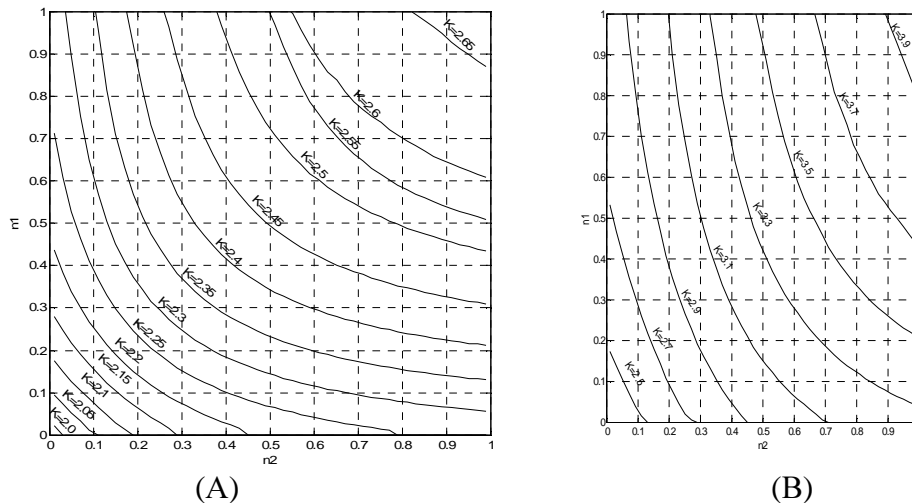
ανάλογα με τις τιμές των λόγων $R = \frac{L_{c2}}{L_{c1}}$, $J_1 = \frac{L_{c1}}{a_1}$ και $J_2 = \frac{L_{c2}}{a_2}$.

Ενδεικτικά διαγράμματα φαίνονται στο Σχ. 3. Από τα διαγράμματα προκύπτει, όπως εξάλλου αναμενόταν, ότι η επιρροή της μεταβλητότητας της διατομής επί του μήκους λυγισμού των υπό μελέτη δοκών είναι σημαντική και πρέπει να λαμβάνεται υπόψη.

$$R=2,0 \quad J_1=J_2=1,0$$



$$R=2,0 \quad J_1=J_2=2,0$$



Σχ.3: Συντελεστές ισοδύναμου μήκους λυγισμού για αμετάθετα (A) και μεταθετά (B) άκρα

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Wood R.H, *Effective lengths of columns in multi-storey building*, Structural Engineer, 52, 1974, pp235-244, 295-302, 341-6
2. Wood R.H. and Robert E.H., *A graphical method of preventing sideways in the design of multistory buildings*, Proc. Inst. Civil Engrs, 59, 1975, pp.353-372
3. Eurocode 3, *Design of Steel Structures*, Part 1.1, Commission of the European Communities, DDENV 1993-1-1:1992
4. British Standards Institution, *Structural Use of Steelwork in Building*, BS 5950: Part 1, BSI, London, 1990.
5. DIN18800, TEIL2, *Stabilitätsfälle, Knicken von Stäben und Stabwerken*, Beuth, Berlin, 1990.
6. Ermopoulos J., *Equivalent Buckling Length of Non-Uniform Members*, Journal of CInstructional Steel Research, Vol 42, No2, pp.141-158, 1997

Tapered beam-columns under compression
Part 3: Critical Loads and Equivalent Buckling Lengths

E. K. Lazaridou

Civil Engineer, Postgraduate student at N.T. University of Athens
School of Civil Engineering, Laboratory of Metal Structures
9 Iroon Politechneiou str., 157 80
Athens, Greece
e-mail: eflazar@otenet.gr

J. Ch. Ermopoulos

Professor N.T. University of Athens
School of Civil Engineering, Laboratory of Metal Structures
9 Iroon Politechneiou str., 157 80
Athens, Greece
e-mail: jermop@central.ntua.gr

SUMMARY

In this paper, axially compressed tapered bars of various shapes, which consist of two or three parts of varying or constant cross-section, are studied. The law of moment of inertia variation that has been used applies mainly to members of steel structures. The non-linear equilibrium equations of those bars are established for non-sway and sway mode. The models considered are similar to those proposed by EC3 Annex E for uniform members. Using an iteration procedure the critical loads and the corresponding equivalent buckling lengths are calculated, while results are presented in graphical form, to make direct use from practicing engineers easy.