

## ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ ΠΥΛΩΝΩΝ ΧΑΛΥΒΔΙΝΩΝ ΓΕΦΥΡΩΝ ΛΟΓΩ ΔΙΕΛΕΥΣΗΣ ΣΥΡΜΩΝ

**Ιωάννης Γ. Ραυτογιάννης & Αθηνά-Χριστιάνα Ανωγιάτη**  
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών  
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 15780  
e-mail: rafto@central.ntua.gr

### 1. ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή διερευνάται το φαινόμενο του παραμετρικού συντονισμού πυλώνων χαλύβδινων γεφυρών λόγω διέλευσης συρμών. Το πρόβλημα ανάγεται στη μελέτη δυναμικής αστάθειας ευθύγραμμων ράβδων θλιβόμενων αξονικά με δύναμη μεταβαλλόμενη ως προς το χρόνο. Εάν το εύρος της θλιπτικής δύναμης σε έναν πυλώνα είναι μικρότερο από το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, ο πυλώνας εκτελεί μόνο αξονική ταλάντωση. Για ορισμένες όμως τιμές του λόγου ιδιοσυχνοτήτων διαμήκους και καμπτικής ταλάντωσης, εμφανίζεται παράλληλα προς την αξονική και καμπτική ταλάντωση με διαρκώς αυξανόμενο εύρος που ενδέχεται να οδηγήσει σε αστοχία του πυλώνα. Το φαινόμενο αυτό του παραμετρικού συντονισμού εμφανίζεται ακόμα και για πολύ μικρό εύρος διακύμανσης της θλιπτικής δύναμης. Στην παρούσα εργασία διερευνώνται οι συνθήκες υπό τις οποίες μπορεί να λάβει χώρα το φαινόμενο αυτό. Με χρήση απλών προσομοιωμάτων μελετάται η επίδραση γεωμετρικών δεδομένων και φορτίων σε πυλώνες χαλύβδινων γεφυρών λόγω διέλευσης συρμών και εξάγονται χρήσιμα συμπεράσματα για το σχεδιασμό τους προς αποφυγή του φαινομένου αυτού.

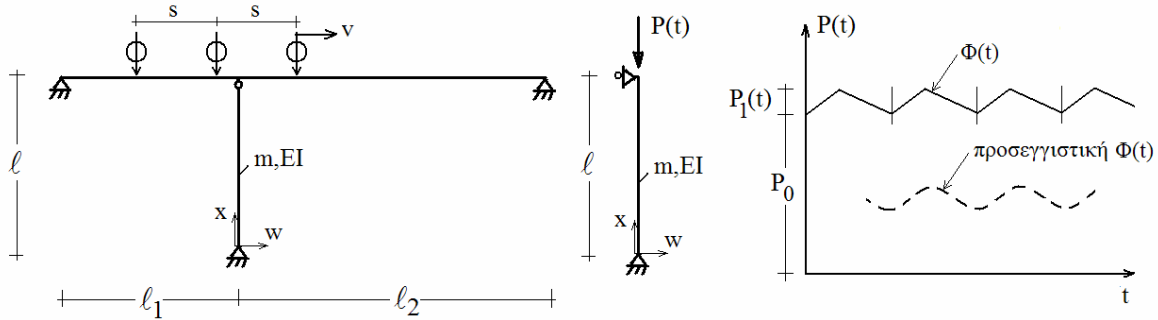
### 2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η δυναμική αστάθεια ελαστικών συστημάτων αποτελεί ένα νέο αναπτυσσόμενο κλάδο της θεωρίας ελαστικότητας με αντικείμενο προβλήματα ταλαντώσεων και ευστάθειας ελαστικών συστημάτων. Κύριο χαρακτηριστικό των προβλημάτων δυναμικής αστάθειας είναι ότι μπορεί να λάβει χώρα αστάθεια του φορέα ακόμα και για πολύ μικρό εύρος διακύμανσης του δυναμικού φορτίου. Τότε ο φορέας εκτελεί ταλάντωση διαρκώς αυξανόμενου εύρους με αποτέλεσμα αστοχία υλικού και πιθανόν κατάρρευση λόγω μεγάλων παραμορφώσεων. Τούτο δε μπορεί να συμβεί για τιμές δυναμικού φορτίου πολύ μικρότερες από τις αντίστοιχες του στατικού φορτίου λυγισμού. Οι γέφυρες είναι φορείς που δέχονται κατά βάση δυναμικά φορτία και συνεπώς η συμπεριφορά τους έχει δυναμικό χαρακτήρα.

Έστω η γέφυρα ΑΒΓ δύο ανοιγμάτων  $l_1$  και  $l_2$  που διαθέτει ένα πυλώνα ύψους  $l$  ως φαίνεται στο Σχήμα 1α. Θεωρούμε ότι η γέφυρα εδράζεται απλά επί του πυλώνα, ο οποίος δέχεται μόνο κατακόρυφα φορτία λόγω της ανωδομής και της διέλευσης φορτίων κυκλοφορίας. Εάν τα φορτία κυκλοφορίας είναι υπό τη μορφή συρμού κινούμενου με ταχύτητα  $v$ , ο πυλώνας φορτίζεται αξονικά με ένα θλιπτικό φορτίο  $P(t)$  συναρτήσει του χρόνου το οποίο είναι της μορφής

$$P(t) = P_0 + P_1 \cdot \Phi(t) \quad (1)$$

όπου  $P_0$  είναι το τμήμα της θλιπτικής δύναμης που οφείλεται στα μόνιμα φορτία της γέφυρας και  $P_1$  είναι το τμήμα που οφείλεται στα φορτία κυκλοφορίας, ενώ  $\Phi(t)$  είναι η χρονική συνάρτηση των φορτίων κυκλοφορίας (βλ. Σχήμα 1β).



Σχ. 1: Μοντέλο γέφυρας με ένα πυλώνα υπό διέλευση συρμού και χρονική συνάρτηση  $P(t)$

Τότε, η εξίσωση δυναμικής ισορροπίας του πυλώνα που αφορά καμπτική ταλάντωση είναι  $EI \cdot w''''(x, t) + P(t) \cdot w''(x, t) + m \cdot \ddot{w}(x, t) = 0$  (2)

όπου  $EI$  είναι η καμπτική δυσκαμψία του πυλώνα,  $m$  είναι η κατανεμημένη μάζα του πυλώνα και  $w(x, t)$  είναι το βέλος κάμψεως του πυλώνα συναρτήσει του χρόνου.

Για την εξ(2) αναζητούμε λύση της μορφής χωριζόμενων μεταβλητών, ως εξής

$$w(x, t) = W_n(x) \cdot T_n(t) \quad (3)$$

όπου  $W_n(x)$  είναι οι συναρτήσεις σχήματος που αντιστοιχούν στις  $n$ -ιδιομορφές ταλάντωσης του πυλώνα και  $T_n(t)$  είναι οι αντίστοιχες χρονικές συναρτήσεις που θα προσδιοριστούν στη συνέχεια. Οι συναρτήσεις σχήματος προσδιορίζονται με βάση τις συνοριακές συνθήκες του φορέα, όπου για την περίπτωση αμφιαρθρωτής ράβδου είναι

$$W_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (4)$$

Εισάγοντας τις εξ(3) και (4) στην εξ(2) έχουμε

$$\left\{ EI \frac{n^4 \pi^4}{\ell^4} T_n(t) - [P_0 + P_1 \cdot \Phi(t)] \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} T_n(t) + m \cdot \ddot{T}_n(t) \right\} \sin \frac{n\pi x}{\ell} = 0 \quad (5)$$

Για να ισχύει η εξ(5) για κάθε  $t$ , πρέπει η παράσταση μέσα στην αγκύλη να είναι μηδέν και άρα έχουμε

$$\ddot{T}_n(t) + EI \frac{n^4 \pi^4}{m \ell^4} T_n(t) - [P_0 + P_1 \cdot \Phi(t)] \frac{n^2 \pi^2}{m \ell^2} T_n(t) = 0 \quad (6)$$

ή

$$\ddot{T}_n(t) + EI \frac{n^4 \pi^4}{m \ell^4} \cdot \left[ 1 - \frac{P_0 + P_1 \cdot \Phi(t)}{P_{En}} \right] \cdot T_n(t) = 0 \quad (7)$$

όπου  $P_{En}$  είναι το στατικό κρίσιμο φορτίο Euler για τη  $n$ -ιδιομορφή

$$P_{En} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{\ell^2} \quad (8)$$

Εάν  $\omega_n$  είναι οι ιδιοσυχνότητες ελεύθερης ταλάντωσης του πυλώνα, θα έχουμε

$$\omega_n^2 = \frac{n^4 \pi^4 EI}{m \ell^4} \quad (9)$$

και η εξ(7) γράφεται ως ακολούθως

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 \cdot \left[ 1 - \frac{P_0 + P_1 \cdot \Phi(t)}{P_{En}} \right] \cdot T_n(t) = 0 \quad (10)$$

Τέλος, ορίζουμε τα ακόλουθα μεγέθη

$$\Omega_n = \omega_n \sqrt{1 - \frac{P_0}{P_{En}}} \quad (11)$$

και

$$\mu_n = \frac{P_1}{2(P_{En} - P_0)} \quad (12)$$

όπου  $\Omega_n$  είναι η συχνότητα ελεύθερης ταλάντωσης του πυλώνα που θλίβεται αξονικά με το φορτίο  $P_0$  και  $\mu_n$  μια αδιάστατη ποσότητα που καλείται παράμετρος διέγερσης. Αντικαθιστώντας τις εξ(11) και (12) στην εξ(10) και παραλείποντας τον δείκτη  $n$  επειδή η εξ(10) ισχύει για κάθε  $n$ , έχουμε

$$\ddot{T}(t) + \Omega^2 \cdot [1 - 2\mu\Phi(t)] \cdot T(t) = 0 \quad (13)$$

### 3. ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΑΣΤΑΘΕΙΑΣ

Θεωρούμε ότι η χρονική συνάρτηση του φορτίου  $P_1$  λόγω διέλευσης του συρμού είναι περιοδική και μπορεί αρχικά να προσεγγισθεί με τη μορφή  $\Phi(t) = \sin\theta t$  (βλ. Σχήμα 1β), όπου  $\theta$  είναι η συχνότητα των φορτίων του συρμού που υπολογίζεται συναρτήσει της ταχύτητας  $v$  και της μεταξύ τους απόστασης  $s$ , και ο χρόνος ανάγεται βάσει της σχέσης  $\theta^* t = 3\pi/2 - \theta t$ . Έτσι λοιπόν, η εξ(13) γράφεται

$$\ddot{T}(t) + \Omega^2 \cdot [1 - 2\mu \cos\theta t] \cdot T_n(t) = 0 \quad (14)$$

Αναζητούμε πρώτα περιοδική λύση [1] με περίοδο  $2T$  της μορφής

$$T(t) = \sum_{v=1,3,5,\dots} \left( a_v \sin \frac{v\theta t}{2} + b_v \cos \frac{v\theta t}{2} \right) \quad (15)$$

Εισάγοντας την εξ(15) στην εξ(14) και εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων όρων  $\sin(v\theta t/2)$  και  $\cos(v\theta t/2)$  καταλήγουμε στο ακόλουθο ομογενές γραμμικό σύστημα με αγνώστους τα  $a_v$  και  $b_v$

$$\left( 1 + \mu - \frac{\theta^2}{2\Omega^2} \right) a_1 - \mu a_3 = 0 \quad (16a)$$

$$\left( 1 - \frac{v^2\theta^2}{4\Omega^2} \right) a_v - \mu (a_{v-2} + a_{v+2}) = 0 \quad (v = 3, 5, 7, \dots)$$

$$\left( 1 - \mu - \frac{\theta^2}{2\Omega^2} \right) b_1 - \mu b_3 = 0 \quad (16b)$$

$$\left( 1 - \frac{v^2\theta^2}{4\Omega^2} \right) b_v - \mu (b_{v-2} + b_{v+2}) = 0 \quad (v = 3, 5, 7, \dots)$$

Παρατηρούμε ότι μόνο η πρώτη εξίσωση κάθε υποσυστήματος ως προς τα  $a_v$  και  $b_v$  διαφέρει στο πρόσημο του  $\mu$ , ενώ οι άλλες ταυτίζονται. Για λύση διάφορη της τετριμμένης πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων  $a_v$  και  $b_v$  να είναι μηδέν, άρα

$$\begin{vmatrix} 1 \pm \mu - \frac{\theta^2}{2\Omega^2} & -\mu & 0 & \dots \\ -\mu & 1 - \frac{9\theta^2}{4\Omega^2} & -\mu & \dots \\ 0 & -\mu & 1 - \frac{25\theta^2}{4\Omega^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

Στη συνέχεια, αναζητούμε περιοδική λύση [1] με περίοδο  $T$  της μορφής

$$T(t) = b_0 + \sum_{v=2,4,6,\dots} \left( a_v \sin \frac{v\theta t}{2} + b_v \cos \frac{v\theta t}{2} \right) \quad (18)$$

και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία καταλήγουμε στο εξής ομογενές γραμμικό σύστημα με αγνώστους τα  $a_v$  και  $b_v$

$$\left( 1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2} \right) a_2 - \mu a_4 = 0 \quad (19a)$$

$$\left( 1 - \frac{v^2 \theta^2}{4\Omega^2} \right) a_v - \mu (a_{v-2} + a_{v+2}) = 0 \quad (v = 2, 4, 6, \dots)$$

$$b_0 - \mu b_2 = 0$$

$$\left( 1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2} \right) b_2 - \mu (2b_0 + b_4) = 0 \quad (19b)$$

$$\left( 1 - \frac{v^2 \theta^2}{4\Omega^2} \right) b_v - \mu (b_{v-2} + b_{v+2}) = 0 \quad (v = 2, 4, 6, \dots)$$

Θέτοντας πάλι τις ορίζουσες των συντελεστών των αγνώστων ίσες με μηδέν έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2} & -\mu & 0 & \dots \\ -\mu & 1 - \frac{4\theta^2}{\Omega^2} & -\mu & \dots \\ 0 & -\mu & 1 - \frac{9\theta^2}{\Omega^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (20)$$

και

$$\begin{vmatrix} 1 & -\mu & 0 & 0 & \dots \\ -2\mu & 1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2} & -\mu & \dots & \dots \\ 0 & -\mu & 1 - \frac{4\theta^2}{\Omega^2} & -\mu & \dots \\ 0 & \dots & -\mu & 1 - \frac{9\theta^2}{\Omega^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (21)$$

Οι εξισώσεις (17), (20) και (21) λέγονται εξισώσεις οριακών ή κρίσιμων συχνοτήτων και συνδέουν τις συχνότητες της εξωτερικής φόρτισης με τη συχνότητα της δοκού και την ένταση της εξωτερικής φόρτισης. Ως κρίσιμες συχνότητες νοούνται οι συχνότητες  $\theta$  της εξωτερικής φόρτισης που αντιστοιχούν στα όρια των περιοχών αστάθειας.

Η κύρια (πρώτη) περιοχή αστάθειας προκύπτει από το μηδενισμό του πρώτου όρου της διαγωνίου της ορίζουσας (17), δηλαδή

$$\theta = 2\Omega\sqrt{1 \pm \mu} \quad (22)$$

Η δεύτερη περιοχή δυναμικής αστάθειας προκύπτει από το μηδενισμό των 2<sup>ας</sup> τάξεως ορίζουσών εξ(20) και εξ(21), που είναι οι εξής

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2} & -\mu \\ -\mu & 1 - \frac{4\theta^2}{\Omega^2} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -\mu \\ -2\mu & 1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (23)$$

Από αυτές προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις για τα όρια της δεύτερης περιοχής αστάθειας

$$\theta = \Omega \sqrt{1 + \frac{1}{3}\mu^2} \quad (24)$$

$$\theta = \Omega \sqrt{1 - 2\mu^2}$$

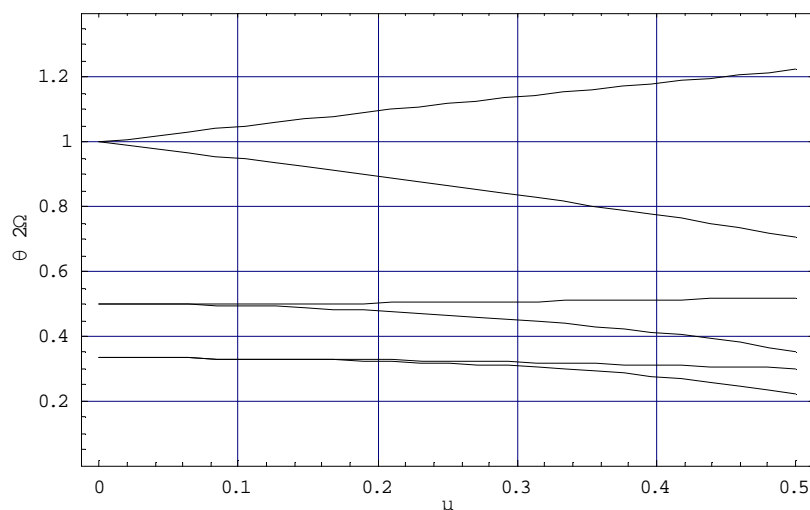
Για τον προσδιορισμό των ορίων της τρίτης περιοχής δυναμικής αστάθειας χρησιμοποιούμε την 2<sup>α</sup> τάξεως ορίζουσα εξ(17), που είναι

$$\begin{vmatrix} 1 \pm \mu - \frac{\theta^2}{2\Omega^2} & -\mu \\ -\mu & 1 - \frac{9\theta^2}{4\Omega^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (25)$$

και η οποία δίνει

$$\theta = 2\Omega \sqrt{\frac{10 \pm 9\mu - \sqrt{(10 \pm 9\mu)^2 + 36(\mu^2 \mp \mu - 1)}}{18}} \quad (26)$$

Κατόπιν αυτών, είμαστε σε θέση να χαράζουμε τις τρεις πρώτες περιοχές δυναμικής αστάθειας  $\theta/2\Omega$  συναρτήσει του  $\mu$  για τιμές πρακτικού ενδιαφέροντος.



Σχ. 2: Περιοχές δυναμικής αστάθειας  $\theta/2\Omega$  συναρτήσει του  $\mu$

#### 4. Η ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ

Στην περίπτωση που υπάρχει απόσβεση, η εξ(2) παίρνει τη μορφή

$$EI \cdot w''''(x, t) + P(t) \cdot w''(x, t) + c \cdot \dot{w}(x, t) + m \cdot \ddot{w}(x, t) = 0 \quad (27)$$

και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που εκτέθηκε παραπάνω, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\ddot{T}(t) + \lambda \cdot \dot{T}(t) + \Omega^2 \cdot [1 - 2\mu\Phi(t)] \cdot T(t) = 0 \quad (28)$$

όπου  $\lambda=c/m$ . Κάνοντας τον ακόλουθο μετασχηματισμό

$$T(t) = e^{-\frac{1}{2}\lambda t} \cdot f(t) \quad (29)$$

η εξ(28) μετά από πράξεις παίρνει τη μορφή

$$\ddot{f}(t) + \left[ \Omega^2 - \frac{1}{4}\lambda^2 - 2\mu\Omega^2\Phi(t) \right] \cdot f(t) = 0 \quad (30)$$

Θέτοντας

$$\bar{\Omega}^2 = \Omega^2 - \frac{1}{4}\lambda^2 \quad (31)$$

και

$$\bar{\mu} = \frac{4\Omega^2}{4\Omega^2 - \lambda^2} \mu \quad (32)$$

η εξ(30) λαμβάνει τη μορφή της εξ(13), δηλαδή

$$\ddot{f}(t) + \bar{\Omega}^2 [1 - 2\bar{\mu}\Phi(t)] \cdot f(t) = 0 \quad (33)$$

η οποία έχει ήδη αναλυθεί παραπάνω. Συνεπώς, οι περιοχές δυναμικής αστάθειας παρουσία απόσβεσης δίδονται και πάλι από το Σχήμα 2, όπου οι τιμές των αξόνων  $\theta/2\Omega$  και  $\mu$  αντικαθίστανται με τις τιμές  $\theta/2\bar{\Omega}$  και  $\bar{\mu}$ , αντίστοιχα.

## 5. ΑΚΡΙΒΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ $\Phi(t)$

Στην περίπτωση θεώρησης της ακριβούς συνάρτησης του εξωτερικού φορτίου  $\Phi(t)$  που είναι πριονωτής μορφής, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία [2] και θεωρούμε περιοδική λύση της μορφής της εξ(15). Η συνάρτηση  $\Phi(t)$  αναλύεται σε σειρά Fourier ως εξής

$$\Phi(t) = \sum_{v=1}^{\infty} (\phi_v \cdot \cos v\theta t) \quad (34)$$

όπου

$$\phi_v = \frac{\int_0^T \Phi(t) \cdot \cos v\theta t \cdot dt}{\int_0^T \cos^2 v\theta t \cdot dt} \quad (35)$$

με  $T=2\pi/\theta$ . Επομένως, η εξ(13) γίνεται

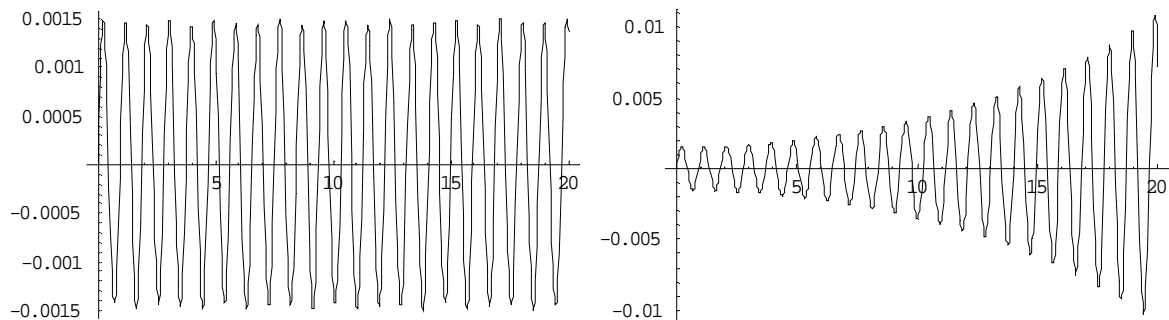
$$\ddot{T}(t) + \Omega^2 \cdot \left[ 1 - 2 \sum_{v=1}^{\infty} \mu_v \cos v\theta t \right] \cdot T(t) = 0 \quad (36)$$

όπου  $\mu_v = \mu \phi_v$  και  $\mu = P_1/2(P_E - P_0)$ . Εισάγοντας την εξ(15) στην εξ(36) και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση οριακών συχνοτήτων

$$\begin{vmatrix} 1 \pm \mu_1 - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} & -(\mu_1 \pm \mu_2) & -(\mu_2 \pm \mu_3) & \dots \\ -(\mu_1 \pm \mu_2) & 1 \pm \mu_3 - \frac{9\theta^2}{4\Omega^2} & -(\mu_1 \pm \mu_4) & \dots \\ -(\mu_2 \pm \mu_3) & -(\mu_1 \pm \mu_4) & 1 \pm \mu_5 - \frac{25\theta^2}{4\Omega^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (37)$$

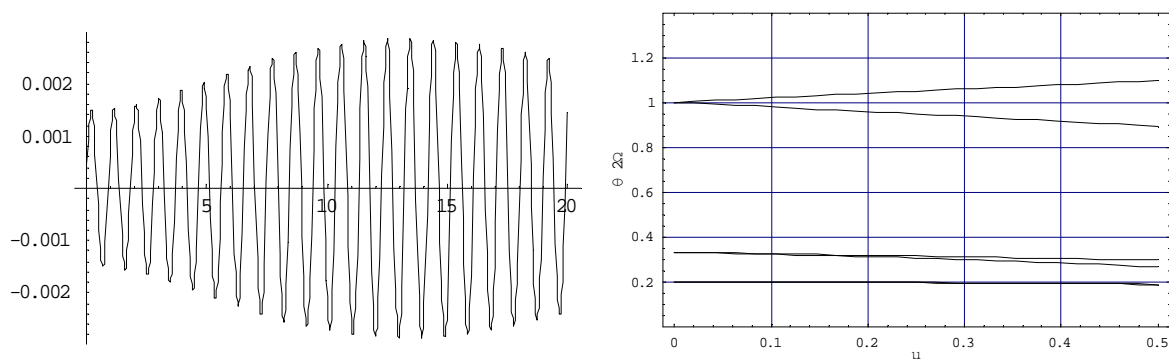
## 6. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Έστω μια γέφυρα δύο ανοιγμάτων  $\ell_1 = \ell_2 = 30\text{m}$  με ένα πυλώνα ύψους  $\ell = 20\text{m}$  πάνω από την οποία διέρχεται συρμός με φορτία άξονα  $P_1 = 60\text{kN}$  ανά  $s = 8\text{m}$  και ταχύτητα  $v = 80\text{km/h}$ . Ο πυλώνας αποτελείται από σύνθετη χαλύβδινη διατομή και έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:  $E = 2.1 \times 10^8 \text{kN/m}^2$ ,  $I = 0.02144 \text{m}^4$ ,  $m = 480 \text{kg/m}$  και φορτίζεται από μόνιμα  $P_0 = 10200 \text{kN}$ . Θεωρούμε ότι η αξονική δύναμη στον πυλώνα μεταβάλλεται ημιτονοειδώς λόγω της διέλευσης του συρμού, και υπολογίζουμε  $\theta = 17.453 \text{sec}^{-1}$ ,  $\Omega = 6.694 \text{sec}^{-1}$ ,  $\mu = 0.034$  και  $\theta/2\Omega = 1.303$ . Το σημείο ( $\mu = 0.034$ ,  $\theta/2\Omega = 1.303$ ) πέφτει εκτός των περιοχών αστάθειας του Σχήματος 2 και ο πυλώνας εκτελεί φραγμένη καμπτική ταλάντωση, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3(α). Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια το ίδιο σύστημα, όπου όμως ο συρμός διέρχεται με ταχύτητα  $v = 61 \text{km/h}$  για την οποία υπολογίζουμε  $\theta = 13.135 \text{sec}^{-1}$ ,  $\Omega = 6.694 \text{sec}^{-1}$ ,  $\mu = 0.034$  και  $\theta/2\Omega = 0.99721$ . Το σημείο ( $\mu = 0.034$ ,  $\theta/2\Omega = 0.99721$ ) πέφτει εντός της πρώτης περιοχής αστάθειας του Σχήματος 2 και ο πυλώνας πλέον εκτελεί καμπτική ταλάντωση διαρκώς αυξανόμενου εύρους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3(β).



Σχ. 3: Καμπτική ταλάντωση πυλώνα χωρίς απόσβεση για διέλευση συρμού με ταχύτητες 80km/h και 61km/h αντίστοιχα

Στο Σχήμα 4(α) φαίνεται η απόκριση του πυλώνα της παραπάνω γέφυρας με απόσβεση  $\lambda=0.05$  και ταχύτητα διέλευσης  $v=61\text{km/h}$ . Εδώ, παρατηρούμε ότι το μετατοπισμένο σημείο ( $\mu$ ,  $\theta/2\Omega$ ) πέφτει ακριβώς εκτός του κάτω ορίου της κύριας ζώνης αστάθειας του Σχήματος 2 και η κίνηση είναι φραγμένη. Στο Σχήμα 4(β) φαίνονται οι ζώνες δυναμικής αστάθειας για πριονωτή μορφή της συνάρτησης του φορτίου  $\Phi(t)$  που προκύπτει από τη γραμμή επιρροής της αξονικής του πυλώνα. Παρατηρούμε ότι η δεύτερη και η τρίτη περιοχή αστάθειας μετατοπίζονται προς χαμηλότερες τιμές του λόγου  $\theta/2\Omega$ , ενώ τα εύρη και των τριών περιοχών περιορίζονται.



Σχ. 4: Καμπτική ταλάντωση πυλώνα με απόσβεση  $\lambda=0.05$  για διέλευση συρμού με ταχύτητα 61km/h και περιοχές αστάθειας για πριονωτή μορφή της  $\Phi(t)$

## 7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το φαινόμενο του παραμετρικού συντονισμού ενδέχεται να λάβει χώρα σε πυλώνες χαλύβδινων γεφυρών λόγω διέλευσης συρμών για συγκεκριμένες περιπτώσεις μάζας και γεωμετρίας πυλώνα και ταχύτητες διέλευσης των συρμών. Στην πράξη, το φαινόμενο αυτό περιορίζεται δραστικά λόγω της απόσβεσης της κατασκευής. Επίσης, η περίπτωση αστοχίας του πυλώνα λόγω μεγάλων παραμορφώσεων προϋποθέτει δυσανάλογα μεγάλο μήκος συρμών σε συνάρτηση με τα χαρακτηριστικά ανοίγματα των συνήθων οδικών ή σιδηροδρομικών γεφυρών.

## 8. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. BOLOTIN VV. The dynamic stability of Elastic Systems (translated from Russian). Holden-Day Inc., San Francisco, 1964.
2. McLachlan NW. Theory and Application of Mathieu Functions. Dover Publications, New York, 1964.

**PARAMETRIC RESONANCE OF STEEL BRIDGES PYLONS DUE TO PERIODIC TRAFFIC LOADS****Ioannis G. Raftoyiannis**

School of Civil Engineering, Laboratory of Metal Structures  
National Technical University of Athens, Greece 15780  
e-mail: rafto@central.ntua.gr

**Athina-Christiana Anogiati**

School of Civil Engineering, Laboratory of Metal Structures  
National Technical University of Athens, Greece 15780

**SUMMARY**

This paper deals with the parametric resonance of steel bridges pylons due to time-dependent traffic loads. The analysis follows the basic lines of Bolotin's technique for the solution of non-linear problems of dynamic stability. In this work, the cases of forced vibrating pylons with and without damping subjected to sinusoidal and arbitrary external dynamic forces acting axially are investigated. Through the aforementioned solution method, useful results regarding the dynamic stability of pylons are obtained and illustrative examples for various cases of geometry and loading are presented in the form of plots and diagrams.