

**ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΟΠΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ ΣΕ
ΧΑΛΥΒΑΙΝΑ ΕΛΑΣΜΑΤΑ ΛΟΓΩ ΑΝΗΡΤΗΜΕΝΩΝ ΦΟΡΤΙΩΝ**

Ιωάννης Γ. Ραυτογιάννης & Γεώργιος Θ. Μιχάλτσος
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 15780
e-mail: rafto@central.ntua.gr, michalts@central.ntua.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή διερευνάται με τη μαθηματική θεωρία ελαστικότητας η εντατική κατάσταση και η διαρροή χαλύβδινων ελασμάτων λόγω ανηρτημένων φορτίων μέσω κοχλιωτής σύνδεσης. Το φαινόμενο αυτό απαντάται σε χαλύβδινα καταστρώματα με σύστημα διαδοκίδων και κοχλιωτές συνδέσεις. Η τυχόν υποχώρηση μιας εκ των διαδοκίδων την καθιστά ανηρτημένη μέσω της κοχλιωτής σύνδεσης στην πλάκα καταστρώματος. Το πρόβλημα ουσιαστικά αντιμετωπίζεται ως κάμψη πλάκας υπό εγκάρσιο συγκεντρωμένο φορτίο που δρα τοπικά και οδηγεί ταχύτατα σε τοπική διαρροή με ανακατανομή των τάσεων στην περίξ της κοχλιωτής σύνδεσης περιοχή. Η ανάλυση γίνεται βάσει μιας αντιπροσωπευτικής ζώνης για το σύστημα πλάκας – κοχλιωτής σύνδεσης που προσομοιάζει επαρκώς τις τοπικές επιδράσεις. Στα θεωρητικά αποτελέσματα, που επαληθεύονται και αριθμητικά, η ανάλυση εμπεριέχει τόσο γεωμετρική μη-γραμμικότητα όσο και μη-γραμμικότητα υλικού. Εξετάζονται διάφορες περιπτώσεις γεωμετρικών παραμέτρων και βάσει των αποτελεσμάτων εξάγονται χρήσιμα συμπεράσματα.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένας πολύ κρίσιμος και επικίνδυνος μηχανισμός αστοχίας στις συνδέσεις χαλύβδινων μελών είναι αυτός που αντιστοιχεί στην εξόλκευση των κοχλιών από χαλύβδινες πλάκες. Παρά τη μεγάλη σημασία αυτού του μηχανισμού αστοχίας, η διεθνής βιβλιογραφία σε αυτό το φαινόμενο είναι πολύ περιορισμένη. Προηγούμενες πειραματικές και αναλυτικές εργασίες σχετικές με το φαινόμενο αυτό [1,2] έχουν δείξει ότι οι μηχανισμοί αστοχίας εξαρτώνται κυρίως από το πάχος των πλακών. Λόγω της μεγάλης σημασίας αυτού του προβλήματος, έχουν γίνει κυρίως αριθμητικές αναλύσεις σε πλάκες με κοχλιωτές συνδέσεις όπου το φαινόμενο εξόλκευσης του κοχλία είναι ο κύριος μηχανισμός αστοχίας. Αν και το πρόβλημα φαίνεται να είναι αρκετά απλό, δεν αποτελεί εντούτοις ένα κλασσικό πρόβλημα ανάλυσης. Οι κατασκευές ή τα μέλη των κατασκευών σχεδιάζονται συνήθως με βάση την ελαστική ή ελαστο-πλαστική θεώρηση. Εντούτοις, ακόμη και στην περίπτωση της πλαστικής θεώρησης εξετάζεται μόνο η περιορισμένη πλαστική ικανότητα. Σε αυτήν την εργασία πραγματοποιείται αναλυτική προσομοίωση για τον εντοπισμό της πλήρους αστοχίας του υλικού.

2. ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ

Στην περίπτωση αυτή, το φαινόμενο εμφανίζεται λόγω υποχώρησης μιας στήριξης ή λόγω ανεμοπίεσης και χαρακτηρίζεται από τελική εξόλκευση του κοχλία που υποβάλλεται σε μια δύναμη F . Θεωρούμε ότι κάθε ένας κοχλίας επηρεάζει εντατικά μια ζώνη 2α (η οποία και παραμορφώνεται) και συνεπώς, μπορούμε να μελετήσουμε το πρόβλημα ως κάμψη

μιας κυκλικής πλάκας πάχους t που είναι πακτωμένη στις παρειές της και στο κέντρο της έχει μια οπή ακτίνας b (βλ. Σχήμα 1).

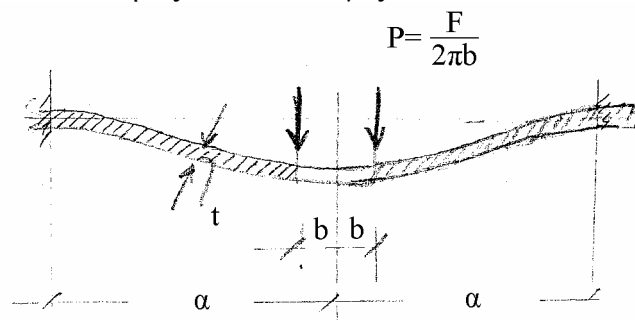
Η εξίσωση που διέπει το πρόβλημα κάμψης της πλάκας είναι [3]

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{Q(r)}{D} \quad (1)$$

όπου $w(r, \theta)$ είναι το βέλος της πλάκας, $Q(r)$ είναι η τέμνουσα δύναμη στην πλάκα σε απόσταση r από το κέντρο της (εκφρασμένη σε δύναμη ανά μονάδα μήκους) και D είναι η καμπτική δυσκαμψία της πλάκας που δίδεται από τη σχέση

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

όπου E = το μέτρο ελαστικότητας και ν = ο λόγος του Poisson.



Σχ. 1 Τομή κυκλικού τμήματος πλάκας με οπή και εγκάρσια φόρτιση λόγω κοχλία

Για μια κυκλική πλάκα που φορτίζεται συμμετρικά, η τέμνουσα δράση σε μια θέση r προσδιορίζεται διαιρώντας το κατανεμημένο φορτίο P του κοχλία που δρα στην περιφέρεια της οπής $2\pi b$ δια της περιφέρειας $2\pi r$ στη θέση r . Συνεπώς, θα έχουμε

$$Q(r) = \frac{2\pi b P}{2\pi r} = P \frac{b}{r} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας την τέμνουσα $Q(r)$ από την εξ(2) στην εξ(1) έχουμε

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{Pb}{Dr}$$

και ολοκληρώνοντας δύο φορές παίρνουμε

$$\frac{dw}{dr} = \frac{Pb}{D} \left(\frac{r}{2} \ln r - \frac{r}{4} \right) + c_1 \frac{r}{2} + \frac{c_2}{r} \quad (3)$$

ή

$$w = \frac{Pb}{D} \left(\frac{r^2}{4} \ln r - \frac{r^2}{4} \right) + c_1 \frac{r^2}{4} + c_2 \ln r + c_3$$

και τελικά

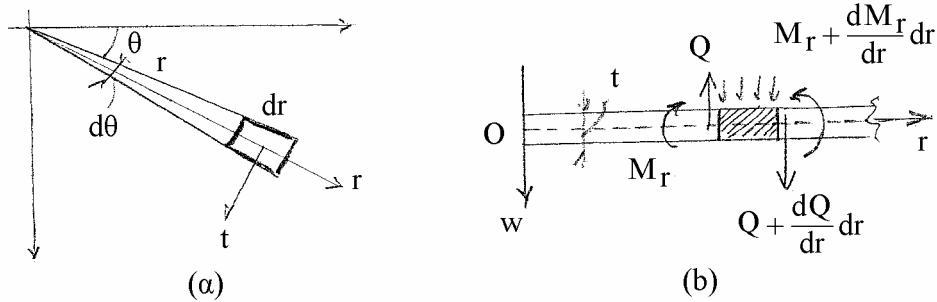
$$w = \frac{Pb}{D} \frac{r^2}{4} (\ln r - 1) + c_1 \frac{r^2}{4} + c_2 \ln r + c_3 \quad (4)$$

Για τη ροπή κάμψεως M_r έχουμε

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (5)$$

και αντικαθιστώντας την εξ(4) στην εξ(5) παίρνουμε

$$M_r = -D \left[\frac{Pb}{D} \left(\frac{1+\nu}{2} \ln r + \frac{1-\nu}{2} \right) + \frac{1+\nu}{2} c_1 - \frac{1-\nu}{r^2} c_2 \right] \quad (6)$$



Σχ. 2 (α) Στοιχειώδες τμήμα πλάκας με οπή και (β) εντατικά μεγέθη

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι

$$w(\alpha) = 0, \quad w'(\alpha) = 0, \quad M_r(b) = 0 \quad (7)$$

και αντικαθιστώντας τις εκφράσεις του βέλους $w(r, \theta)$ και της ροπής M_r καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα:

$$\frac{\alpha^2}{4} c_1 + \ln \alpha \cdot c_2 + c_3 = -\frac{Pb}{D} \cdot \frac{\alpha^2}{4} (\ln \alpha - 1)$$

$$\frac{\alpha}{2} c_1 + \frac{1}{\alpha} c_2 = -\frac{Pb}{D} \cdot \frac{\alpha}{2} (\ln \alpha - \frac{1}{2}) \quad (8)$$

$$\frac{1+\nu}{2} c_1 - \frac{1-\nu}{b^2} c_2 = +\frac{Pb}{D} \cdot \left(\frac{1+\nu}{2} \ln b + \frac{1-\nu}{4} \right)$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα, προσδιορίζονται οι σταθερές ολοκλήρωσης c_1 , c_2 και c_3 που είναι οι ακόλουθες

$$c_1 = -\frac{1}{2} \frac{Pb(b^2 - b^2\mu + 2b^2 \ln(b) + 2b^2 \ln(b)\mu + \alpha^2 + 2\mu\alpha^2 \ln(\alpha) - 2\alpha^2 \ln(\alpha) - \mu\alpha^2)}{D(-b^2 - b^2\mu - \alpha^2 + \mu\alpha^2)}$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \frac{Pb^3\alpha^2(-\mu + \ln(b) + \ln(b)\mu + \ln(\alpha) + \mu \ln(\alpha))}{D(-b^2 - b^2\mu - \alpha^2 + \mu\alpha^2)} \quad (9)$$

$$c_3 = -\frac{1}{8} \alpha^2 Pb(-\mu\alpha^2 - 6\ln(\alpha)b^2\mu + 4\ln(\alpha)b^2 \ln(b) + 4\ln(\alpha)^2 b^2\mu - 2\ln(\alpha)b^2 + 4\ln(\alpha)^2 b^2 + 3b^2\mu - 2b^2 \ln(b)\mu + 4\ln(\alpha)b^2 \ln(b)\mu - 2b^2 \ln(b) + \alpha^2 + b^2) / (D(-b^2 - b^2\mu - \alpha^2 + \mu\alpha^2))$$

3. ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ

Στην περίπτωση αυτή, το υλικό είναι κρατυνόμενος χάλυβας και η σχέση τάσεων-παραμορφώσεων μπορεί να περιγραφεί από τις σχέσεις:

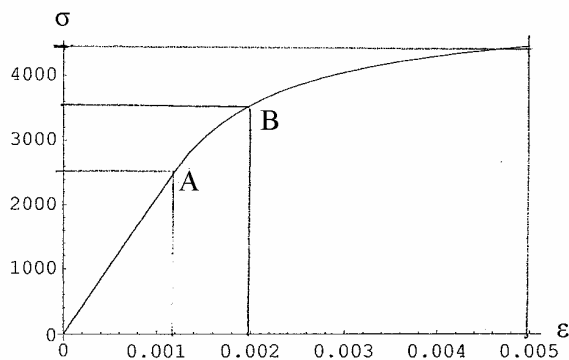
$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_e$$

$$\sigma = A - \frac{B}{\varepsilon} \quad \varepsilon_e \leq \varepsilon \quad (10)$$

όπου A και B είναι σταθερές που εξαρτώνται από την ποιότητα του υλικού. Επί παραδείγματι, ο χάλυβας ποιότητας S355CM [4] έχει την ακόλουθη σχέση τάσεων παραμορφώσεων

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad 0 \leq \varepsilon \leq 0.0012$$

$$\sigma = 5040 - \frac{3.024}{\varepsilon} \quad 0.0012 \leq \varepsilon \quad (10')$$



Σχ. 3 Διάγραμμα τάσεων – παραμορφώσεων κρατηνόμενου χάλυβα S355CM

Επίσης, ορίζουμε ως κρίσιμο φορτίο F_{cr} το φορτίο που προκαλεί πλήρη πλαστικοποίηση της παρειάς της οπής και έχει ως συνέπεια την εξόλκευση του κοχλία διαμέσου αυτής. Υιοθετώντας την υπόθεση Bleich [5] για ανισότροπη συμπεριφορά πλακών στην ελαστοπλαστική περιοχή, ορίζουμε τον λόγο

$$\psi = \frac{E_t}{E} \quad (11)$$

όπου ψ είναι ο λόγος του εφαπτομενικού μέτρου ελαστικότητας E_t προς το μέτρο E του Young. Συνεπώς, η εξ(5) γίνεται

$$M_{tp} = -D \left(\psi \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{v \sqrt{\psi}}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (12)$$

Όταν η παρειά της οπής έχει πλήρως πλαστικοποιηθεί, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την τιμή E_t στο σημείο B (βλ. Σχήμα 3) που αντιστοιχεί στο $\varepsilon = \varepsilon_f$. Για παράδειγμα, ο χάλυβας ποιότητας S355CM έχει $\varepsilon_f = 0.002$ και $E_t = 0.765 \times 10^6 \text{ dN/cm}^2$.

Θέτοντας

$$M_{tp}(b) = M_p \quad (13)$$

μπορούμε να προσδιορίσουμε την κρίσιμη τιμή του φορτίου F_{cr} . Η ροπή M_p είναι η ροπή πλήρους πλαστικοποίησης της παρειάς της οπής που υπολογίζεται από τη σχέση

$$M_p = \sigma_f \frac{t^2}{4}$$

όπου $\sigma_f =$ το όριο διαρροής.

Ο προσδιορισμός της ακριβούς έκφρασης της παραμορφωμένης κατάστασης για φορτίο $F < F_{cr}$ είναι εξαιρετικά δυσχερής. Μια ικανοποιητική προσέγγιση επιτυγχάνεται μέσω της χρήσης της μέσης τιμής του λόγου ψ μεταξύ των σημείων A και B (βλ. Σχήμα 4).

Έτσι, με βάση το Σχήμα 5, έχουμε

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{dx} = \frac{AA' + BB'}{AB} = \frac{AA'}{AB/2} = \frac{AA'}{GO} \cong \frac{z}{R}$$

ή

$$\frac{1}{R} = \frac{\varepsilon}{z} = \frac{\varepsilon_f}{\zeta} \quad (14)$$

και

$$w_p''(r) = \frac{1}{R(r)} = \frac{\sigma_f}{E \zeta(r)} \quad (15)$$

Ο όρος $\zeta(r)$ που καθορίζει την ελαστική περιοχή της διατομής δίδεται από την ακόλουθη σχέση

$$\zeta(r) = \frac{t\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \frac{M_{rp}(r)}{M_p}} \quad (16)$$

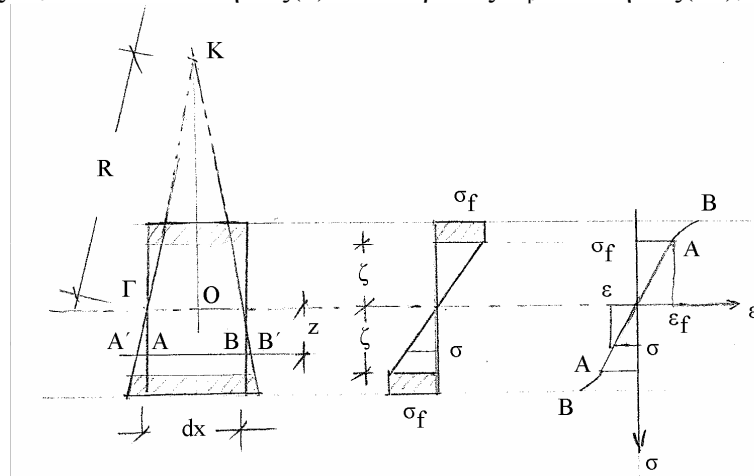
Το μήκος ℓ_p που αφορά το πλαστικοποιημένο τμήμα μπορεί να προσδιοριστεί από τις εκφράσεις των ροπών θέτοντας

$$M_r(r) = M_e \quad (17)$$

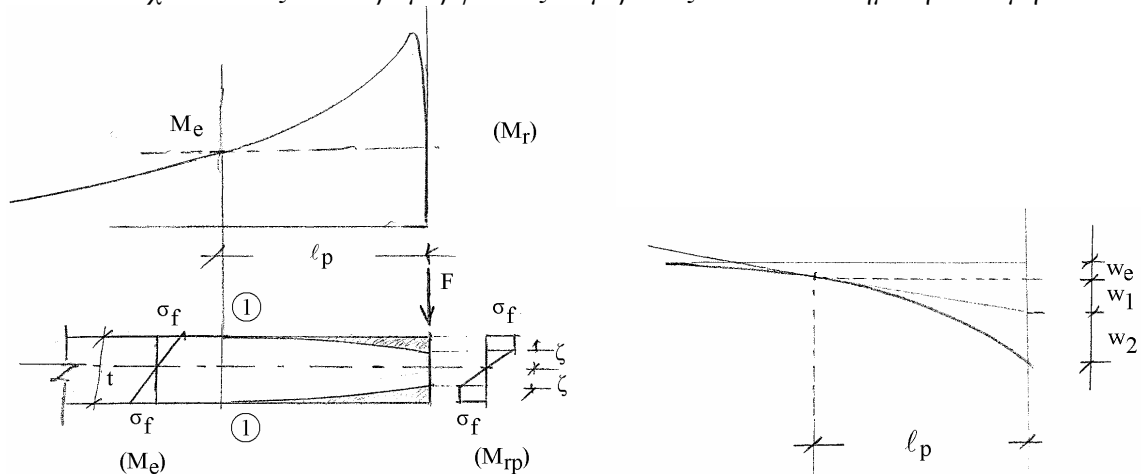
όπου η M_r δίδεται από την εξ(5) και η $M_e = \sigma_f t^2/6$. Αν w_e είναι το βέλος της πλάκας στον άξονα 1-1 (για μήκος ℓ_p) μπορούμε να προσδιορίσουμε το συνολικό βέλος από τη σχέση

$$w = w_e + \ell_p w'_e(\ell_p) + w_p \quad (18)$$

όπου το βέλος w_e δίδεται από την εξ(4) και το βέλος w_p από την εξ(13), αντίστοιχα.



Σχ. 4 Τάσεις και παραμορφώσεις σε μερικώς πλαστικοποιημένη διατομή

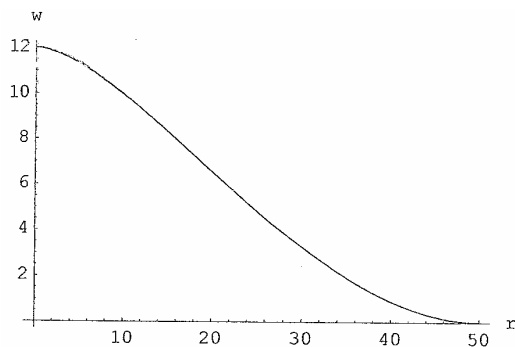


Σχ. 5 Ροπή κάμψεως και βέλος στην μερικώς πλαστικοποιημένη ζώνη ℓ_p της πλάκας

4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

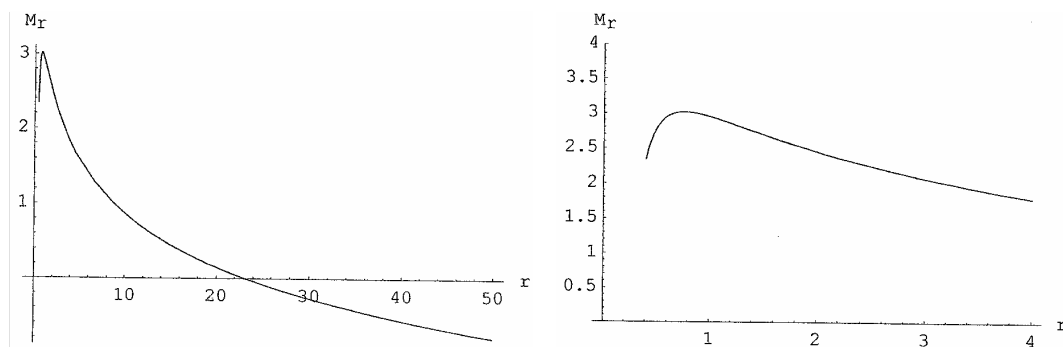
Θεωρούμε για παράδειγμα μια κυκλική πλάκα από δομικό χάλυβα S355MC με διάμετρο 1.00m και πάχος 0.6mm η οποία είναι πακτωμένη περιμετρικά. Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού είναι $E=2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ και ο λόγος του Poisson είναι $\nu=0.30$. Στο κέντρο της πλάκας τοποθετείται ένας κοχλίας διαμέτρου 8mm που φορτίζει εγκάρσια την πλάκα.

Κατ' αρχάς εφαρμόζουμε φορτίο $P=100\text{N}$. Με βάση την ελαστική ανάλυση που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 2 προσδιορίζεται το βέλος κάμψεως της πλάκας $w(r,0)$ που φαίνεται στο Σχήμα 6, καθώς και το διάγραμμα της κατανεμημένης ροπής $M_r(r)$. Κατόπιν εφαρμόζουμε την πλαστική ανάλυση της παραγράφου 3.



Σχ. 6 Βέλος κάμψης w συναρτήσει της ακτίνας r

Παρατηρούμε ότι η ροπή κάμψεως - Σχήμα 7(α) - αλλάζει πρόσημο για ακτίνα $r=220\text{mm}$, ενώ κοντά στην οπή, η καμπυλότητα επίσης αλλάζει πρόσημο λόγω προόδου της πλαστικής ζώνης. Το φαινόμενο πλήρους πλαστικοποίησης της περιμέτρου της οπής λαμβάνει χώρα για φορτίο $P=240.72\text{N}$, ενώ η περιοχή πλαστικοποίησης έχει ακτίνα $\ell_p=9.87\text{cm}$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 7(β).



Σχ. 7 (α) Ροπή κάμψης της πλάκας M_r συναρτήσει της ακτίνας r και (β) μεγέθυνση στη θέση της οπής

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σε αυτή την εργασία επιχειρείται μια αναλυτική προσομοίωση του φαινομένου διάτρησης πλακών και εξόλκευσης κοχλιών. Αν και έχουν επιτευχθεί μερικά ενδιαφέροντα αποτελέσματα (πχ. ο μηχανισμός αστοχίας προσομοιώνεται με ακρίβεια), οι τιμές φορτίου-μετατόπισης παρουσιάζουν εντούτοις μικρές αποκλίσεις από αντίστοιχες τιμές που προσδιορίστηκαν με μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων.

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] BANIOPOULOS CC. Connections in Metal Structures. Ziti Publ., Thessaloniki, 2003.
- [2] IYANYI P, ZYGOMALAS M, BANIOPOULOS CC. On the Numerical Modeling of the Bolt Pull-out Phenomenon from a Steel Plate in a Bolted Steel Connection, 5th CRACM Congress, Limassol, June 29 – July 1, 2005.
- [3] SZILARD R. Theory and Analysis of Plates. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- [4] EUROCODE 3. Design of Steel Structures, Part 1.4 General Rules - Supplementary Rules for Stainless Steels. European Committee for Standardization, Brussels, 2006.
- [5] BLEICH F. Buckling Strength of Metal Structures. McGraw-Hill, New York, 1952.

ANALYTICAL TREATMENT OF LOCAL STRESS DISTRIBUTIONS IN STEEL PLATES DUE TO TRANSVERSE LOADS

Ioannis G. Raftoyiannis & George T. Michaltsos

Laboratory of Metal Structures, Department of Civil Engineering

National Technical University of Athens, Greece 15780

e-mail: rafto@central.ntua.gr , michalts@central.ntua.gr

SUMMARY

In this paper, an analytical study on local stress distribution and yielding in steel plates subjected to concentrated transverse loads caused by bolts is presented. Steel decks usually rest on a system of parallel girders with bolted connections. In the case of settlement of a beam, the steel deck resists through the bolted connection. The load is transversely applied to the deck through the bolt head or the bolt nut up to local yielding and failure. This paper is part of a research program on this field consisting by experimental and analytical investigation. The analysis is facilitated by considering a representative area of the deck, depending on the boundary conditions, capable of capturing the local stress distribution. The analytical method is employed by means of geometrical and material nonlinearity. Several case studies are presented for various geometrical parameters and useful results are obtained and discussed. The case studies presented herein are illustrated by means of several practical examples.