

**ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΧΩΡΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ  
ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΙΣ ΑΤΕΛΕΙΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ****Χρήστος Δ. Μπίσμπος**

Καθηγητής

Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Α.Π.Θ.

54124 Θεσσαλονίκη, Ελλάδα

e-mail: [cbisbos@civil.auth.gr](mailto:cbisbos@civil.auth.gr)**Μαρία-Άννα Α. Σκορδέλη**

Διπλ. Πολιτικός Μηχανικός, Υποψήφια Διδάκτορας

Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Α.Π.Θ.

54124 Θεσσαλονίκη, Ελλάδα

e-mail : [mskordel@civil.auth.gr](mailto:mskordel@civil.auth.gr)**1. ΠΕΡΙΛΗΨΗ**

Η παρούσα εργασία αφορά στην οριακή ανάλυση μεταλλικών χωρικών πλαισίων υπό αβεβαιότητα της φόρτισης, η οποία προκαλείται από την συμπερίληψη πρόσθετων οριζοντίων φορτίων ορόφων που αντιστοιχούν στις ατέλειες συστήματος. Τα ανωτέρω φορτία εισάγουν μια φορτιστική αβεβαιότητα καθόσον πρέπει να επιβληθούν με τον δυσμενέστερο για τον φορέα τρόπο. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται ως αντίστοιχο πρόβλημα ανάλυσης προσαρμογής, που αποτελεί γενίκευση του προβλήματος οριακής ανάλυσης. Στο πλαίσιο αυτό η αβεβαιότητα των οριζοντίων φορτίων ατελειών θεωρείται εναλλακτικά είτε ως α) ανεξάρτητη κατά τις δύο οριζόντιες κατευθύνσεις, οπότε η περιοχή αβεβαιότητας είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο (δυσμενής παραδοχή: μέγιστες ατέλειες συστήματος ταυτόχρονα και ανεξάρτητα στις δύο οριζόντιες κατευθύνσεις) είτε ως β) σφαιρικά συζευγμένη, δηλαδή η περιοχή αβεβαιότητας είναι ελλειψοειδής (ευμενής παραδοχή: μέγιστη ατέλεια στη μία οριζόντια κατεύθυνση αλλά μηδενική στην άλλη). Εισάγεται πολλαπλαστής της περιοχής αβεβαιότητας  $\lambda$  (ο οποίος κατά τον EC3 παίρνει την σταθερή τιμή 1/200), οπότε καθίσταται δυνατή η εκτέλεση παραμετρικών επιλύσεων και η μελέτη της ευασθησίας/στιβαρότητας του συντελεστή ασφάλειας σε πλαστική κατάρρευση, όταν λαμβάνονται υπόψη οι ανωτέρω δύο τύποι αβεβαιότητας των οριζοντίων φορτίων ατελειών. Παρατίθεται αριθμητικό παράδειγμα.

**2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ**

Η οριακή ανάλυση (limit analysis - LA) μεταλλικών πλαισίων αποτελεί δόκιμο τρόπο υπολογισμού της ασφάλειας του πλαισίου έναντι πλαστικής κατάρρευσης υπό δοσμένο σύστημα φόρτισης, το οποίο αυξάνεται αναλογικά. Σύμφωνα με τους κανονισμούς θα πρέπει να συμπεριληφθούν στους αντίστοιχους υπολογισμούς και οι ατέλειες συστήματος,

οι οποίες συνήθως εισάγονται ως ισοδύναμα οριζόντια φορτία ορόφων. Κατά τον EC3 τα ανωτέρω ισοδύναμα φορτία ορόφων λαμβάνονται ίσα προς το  $\lambda = 1/200$  των αντιστοίχων κατακορύφων. Η συμπερίληψη της επιρροής των ατελειών συστήματος στο πρόβλημα της οριακής ανάλυσης εισάγει μια αβεβαιότητα των φορτίσεων, καθόσον οι ατέλειες αυτές πρέπει να επιβληθούν κατά την δυσμενέστερη για τον φορέα κατεύθυνση και συνδυασμό, ο οποίος όμως δεν είναι εξαρχής γνωστός, ιδιαίτερα αν ο φορέας παρουσιάζει μη-κανονικότητες. Κατά συνέπεια, τίθεται το πρόβλημα της στιβαρότητας (robustness) της λύσης του προβλήματος οριακής ανάλυσης ως προς την αβεβαιότητα της φόρτισης λόγω των ατελειών συστήματος.

Στα πλαίσια της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων (FEM) η οριακή ανάλυση οδηγεί σε ένα πρόβλημα Υπολογιστικής Βελτιστοποίησης (Computational Optimization), το οποίο καθίσταται πρόβλημα μαθηματικού Γραμμικού Προγραμματισμού (Linear Programming - LP), όταν τα κριτήρια διαρροής των ελεγχόμενων διατομών (δηλαδή οι σχέσεις πλαστικής αλληλεπίδρασης N-My-Mz) λαμβάνονται γραμμικοποιημένα (βλ. π.χ. [1-3]). Συνακόλουθα, η επίλυση του προβλήματος της οριακής ανάλυσης γίνεται με άμεση είτε έμμεση σύζευξη κατάλληλου λογισμικού FEM με πρόσφορο λογισμικό LP.

Το πρόβλημα της ανάλυσης προσαρμογής (shakedown analysis – SDA) αποτελεί ως γνωστόν γενίκευση του προβλήματος LA και αποσκοπεί στον προσδιορισμό των περιθωρίων ασφαλείας έναντι πλαστικής κατάρρευσης όταν η φόρτιση μεταβάλλεται βραδέως (αγνοώντας δηλαδή δυναμικά φαινόμενα) εντός δοσμένων ορίων (βλ. π.χ. [2-4]). Σε πρόσφατη εργασία αποδείχθηκε πως το πρόβλημα της οριακής ανάλυσης υπό αβεβαιότητα της φόρτισης ανάγεται σε πρόβλημα ανάλυσης προσαρμογής (Shakedown Analysis – SDA), εφόσον αναζητείται το δυσμενέστερο σενάριο φόρτισης [5]. Στην κλασική ανάλυση SDA η περιοχή μεταβολής της φόρτισης λαμβάνεται πολυεδρική (με γραμμικά σύνορα), όμως στην εργασία [5] λύθηκε και η περίπτωση περιοχών γενικής μορφής με καμπύλα σύνορα, οπότε μπορεί να αποφευχθεί η πιθανή υπερσυντηρικότητα εξαιτίας της έλλειψης του κατάλληλου υπολογιστικού εργαλείου. Στην εργασία [6] μελετήθηκε η πλαστική στιβαρότητα στοιχείων αλουμινίου υπό επίπεδη ένταση με αβεβαιότητα της φόρτισης.

Στην παρούσα εργασία, η ανωτέρω προσέγγιση εφαρμόστηκε για την μελέτη της στιβαρότητας του συντελεστή ασφάλειας μεταλλικών χωρικών φορέων σε πλαστική κατάρρευση, όταν τα ισοδύναμα φορτία ατελειών συστήματος θεωρούνται διατάραξη της κατακόρυφης φόρτισης, η οποία διατάραξη μπορεί να παίρνει τιμές μέσα σε δοσμένη περιοχή μορφής είτε ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου (box-shaped load domain) είτε μορφής έλλειψης. Η επιρροή του εύρους της διατάραξης καλύπτεται με την εισαγωγή μεταβλητού συντελεστή  $\lambda$  (ο οποίος είναι ίσος προς  $1/200$  στο μοντέλο φόρτισης του EC3). Με τον τρόπο αυτό διατυπώνεται το μεθοδολογικό πλαίσιο εκτέλεσης καταλλήλων παραμετρικών αναλύσεων. Παρατίθεται αριθμητικό παράδειγμα διόροφου κτίριου με εσοχή.

### 3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΦΟΡΤΙΣΗ

Έστω χωρικό μεταλλικό πλαίσιο  $\Omega$ , διακριτοποιημένο με NU ελεύθερους βαθμούς ελευθερίας και NE στοιχεία ράβδου. Το κάθε στοιχείο ράβδου έχει NGE σημεία Gauss (G.P.), οπότε το  $\Omega$  έχει συνολικά  $NG = (NGE)(NE)$  τέτοια σημεία. Στο  $j$ -σημείο η ένταση ορίζεται από το τοπικό διάνυσμα  $s_j = (N_x, V_y, V_z, M_x, M_y, M_z)^T$ , που πρέπει να ικανοποιεί το τοπικό κριτήριο διαρροής. Στην εργασία αυτή θεωρούμε γραμμικοποιημένα κριτήρια:

$$\mathbf{N}_j^T \mathbf{s}_j \leq \mathbf{k}_{oj}, \quad j=1, \dots, NG \quad (1)$$

Στο  $j$ -σημείο Gauss ορίζονται το μητρώο νόμου υλικού  $\mathbf{C}_j$ , ο συντελεστής αριθμητικής ολοκλήρωσης  $w_j$  και το μητρώο παραμορφώσεων - μετατοπίσεων  $\mathbf{B}_j$ . Από τα δεδομένα αυτά κατασκευάζεται το μητρώο δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$  του μεταλλικού πλαισίου  $\Omega$ . Η ελαστική απόκριση του  $\Omega$  υπό φόρτιση  $\boldsymbol{\varphi}$  δίνεται από την:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}, \quad \mathbf{s}_j^{(el)} = \mathbf{C}_j \mathbf{B}_j \mathbf{u}, \quad j=1, \dots, NG \quad (2)$$

Αν  $\lambda$  είναι παράμετρος με δοσμένη τιμή,  $C_M$  είναι δοσμένο κλειστό και φραγμένο σύνολο μικρής διάστασης  $NM$  και η φόρτιση  $\boldsymbol{\varphi}$  επιτρέπεται να μεταβάλλεται κατά τυχαίο τρόπο εντός της συμπαγούς περιοχής:

$$L_V = \{ \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^{NU} : \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}^{(c)} + \boldsymbol{\varphi}^{(m)}, \quad \boldsymbol{\varphi}^{(m)} = \lambda \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\mu}, \quad \boldsymbol{\mu} \in C_M \subset \mathbb{R}^{NM} \} \quad (3)$$

τότε η (2) ορίζει την αντίστοιχη συμπαγή περιοχή εντός της οποίας μεταβάλλεται το  $\mathbf{s}_j^{(el)}$ :

$$V_j = \{ \mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^6 : \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j^{(c)} + \mathbf{v}_j^{(m)}, \quad \mathbf{v}_j^{(m)} = \lambda \mathbf{V}_j \boldsymbol{\mu}, \quad \boldsymbol{\mu} \in C_M \} \quad (4)$$

Στην (3) το  $\boldsymbol{\varphi}^{(c)}$  αποτελεί το κεντρικό μέρος (central part) της φόρτισης ενώ το  $\boldsymbol{\varphi}^{(m)}$  αποτελεί την διατάραξη (perturbation part). Οι παράμετροι  $\boldsymbol{\mu}$  αποτελούν τους συντελεστές φόρτισης (load pattern multipliers) που αντιστοιχούν στις φορτίσεις-στήλες του  $\boldsymbol{\Phi}$ . Προφανώς, η παράμετρος  $\lambda$  αφορά συνολικά στο μέγεθος της διατάραξης.

Το πρόβλημα της ελαστικής προσαρμογής του φορέα  $\Omega$  προς την περιοχή φόρτισης  $L_V$  δίνεται από το ακόλουθο πρόβλημα υπολογιστικής βελτιστοποίησης (βλ. πχ. [5]) με αγνώστους τον συντελεστή ασφάλειας  $\alpha$  και το αυτοϊσορροπούμενο εντατικό πεδίο  $\boldsymbol{\rho}$ :

$$\underline{\text{SDA}}: \quad \max \alpha, \quad \text{s.t.}: \quad \sum_{j=1}^{NG} w_j \mathbf{B}_j^T \boldsymbol{\rho}_j = \mathbf{0} \quad (5a)$$

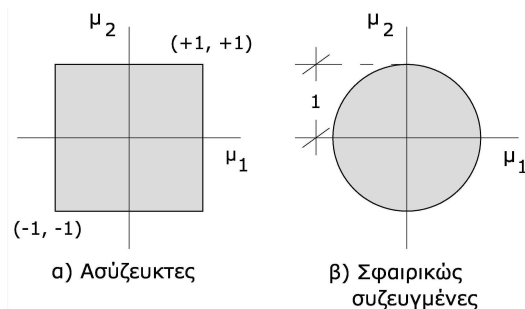
$$\mathbf{N}_j^T [\alpha (\mathbf{v}_j^{(c)} + \lambda \mathbf{V}_j \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\rho}_j] \leq \mathbf{k}_{oj}, \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in C_M, \quad j=1, \dots, NG \quad (5b)$$

Στην εργασία [5] αναπτύσσεται μέθοδος επίλυσης του ανωτέρω προβλήματος SDA για διάφορους τύπους συνόλων  $C_M$ . Όταν  $L_V = \{ \boldsymbol{\varphi}^{(c)} \}$ , όταν δηλαδή η διατάραξη  $\boldsymbol{\varphi}^{(m)}$  και άρα και οι αντίστοιχες ελαστικές τάσεις  $\mathbf{v}_j^{(m)}$  είναι απύσες, το πρόβλημα μεταπίπτει στο γνωστό πρόβλημα οριακής ανάλυσης:

$$\underline{\text{LA}}: \quad \max \alpha \quad \text{s.t.}: \quad \sum_{j=1}^{NG} w_j \mathbf{B}_j^T \boldsymbol{\rho}_j = \mathbf{0} \quad (6a)$$

$$\mathbf{N}_j^T (\alpha \mathbf{v}_j^{(c)} + \boldsymbol{\rho}_j) \leq \mathbf{k}_{oj}, \quad j=1, \dots, NG \quad (6b)$$

#### 4. ΦΟΡΤΙΑ ΑΤΕΛΕΙΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΩΣ ΦΟΡΤΙΣΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΡΑΞΗ



Σχ. 1: Περιπτώσεις σύζευξης φορτίων ατελειών συστήματος

Έστω ότι :

- το κεντρικό μέρος  $\Phi^{(c)}$  της φόρτισης περιλαμβάνει όλα τα κατακόρυφα φορτία
- η διατάραξη  $\Phi^{(m)}$  περιλαμβάνει τα οριζόντια φορτία ατελειών συστήματος.

Στην περίπτωση αυτή το φορτιστικό μητρώο  $\Phi$  έχει  $NM = 2$  στήλες: η πρώτη στήλη  $\Phi^{(1)}$  περιλαμβάνει την οριζόντια φόρτιση αναφοράς κατά την x-κατεύθυνση λόγω ατελειών συστήματος ενώ η δεύτερη στήλη  $\Phi^{(2)}$  είναι η αντίστοιχη κατά την y-κατεύθυνση φόρτιση. Επειδή οι στήλες του  $\Phi$  θεωρούνται φορτίσεις αναφοράς και περιέχουν απλώς τα κατακόρυφα φορτία ορόφων (θεωρούμενα ως οριζόντια κατά την εκάστοτε κατεύθυνση και εφαρμοζόμενα στα κέντρα των διαφραγμάτων των ορόφων), η παράμετρος  $\lambda$  εκφράζει το ενεργό μέγεθος των ατελειών συστήματος (ο EC3 προβλέπει την τιμή  $\lambda = 1/200$ ). Τότε η (3) παίρνει την μορφή:

$$L_V = \{ \Phi \in \mathbb{R}^{NU} : \Phi = \Phi^{(c)} + \lambda (\Phi^{(1)} \mu_1 + \Phi^{(2)} \mu_2) \quad (\mu_1, \mu_2) \in C_M \subset \mathbb{R}^2 \} \quad (7)$$

Η μορφή του συνόλου  $C_M$  προδιαγράφει τον τύπο ταυτόχρονης εμφάνισης (σύζευξης) των ατελειών συστήματος και στην παρούσα εργασία αντιμετωπίζονται δύο εναλλακτικές περιπτώσεις :

- Δυσμενέστερη παραδοχή: Ανεξάρτητα φορτία ατελειών (βλ. Σχ. 1α) :

$$C_M = \{ (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \mu_1 \leq +1, -1 \leq \mu_2 \leq +1 \} \quad (8)$$

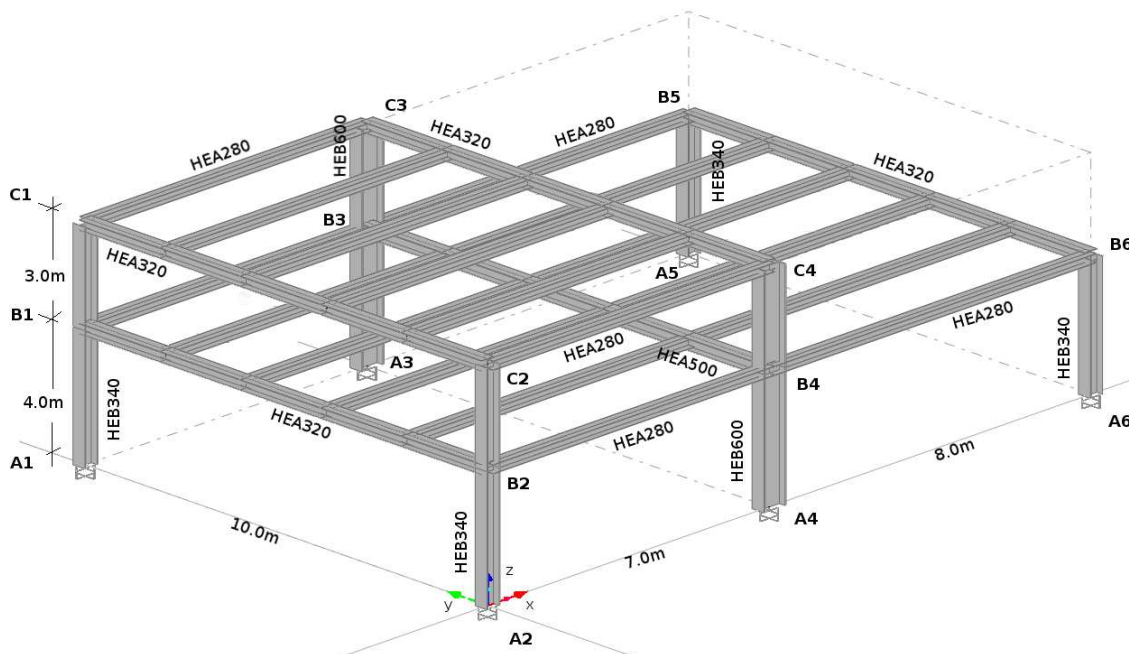
- Ευμενέστερη παραδοχή: σφαιρικά συζευγμένα φορτία ατελειών (βλ. Σχ. 1β) :

$$C_M = \{ (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 : (\mu_1)^2 + (\mu_2)^2 \leq 1 \} \quad (9)$$

Οι σχέσεις (5)-(9) παρέχουν το μεθοδολογικό πλαίσιο διερεύνησης της ευασθησίας/στιβαρότητας του συντελεστή ασφάλειας  $\alpha$  ως προς την εισαγωγή διαφόρων τύπων φορτίσεων λόγω ατελειών συστήματος και μάλιστα για διάφορες στάθμες έντασης των τελευταίων. Η καθαυτό υπολογιστική πραγμάτευση γίνεται με βάση όσα περιγράφονται στην εργασία [5].

## 5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η αριθμητική εφαρμογή αφορά διάφορο χαλύβδινο κτίριο με εσοχή (Σχ.2) και ατέλειες συστήματος κατά την x και y διεύθυνση. Εξετάζεται η επιρροή του μεγέθους των ατελειών στον συντελεστή ασφαλείας της κατασκευής για τις ανωτέρω δύο περιπτώσεις σύζευξης: α) ανεξάρτητης αβεβαιότητας (box shaped uncertainty) και β) συζευγμένης (ελλειψοειδούς) αβεβαιότητας



Σχ. 2: Γεωμετρία χωρικού μεταλλικού πλαισίου

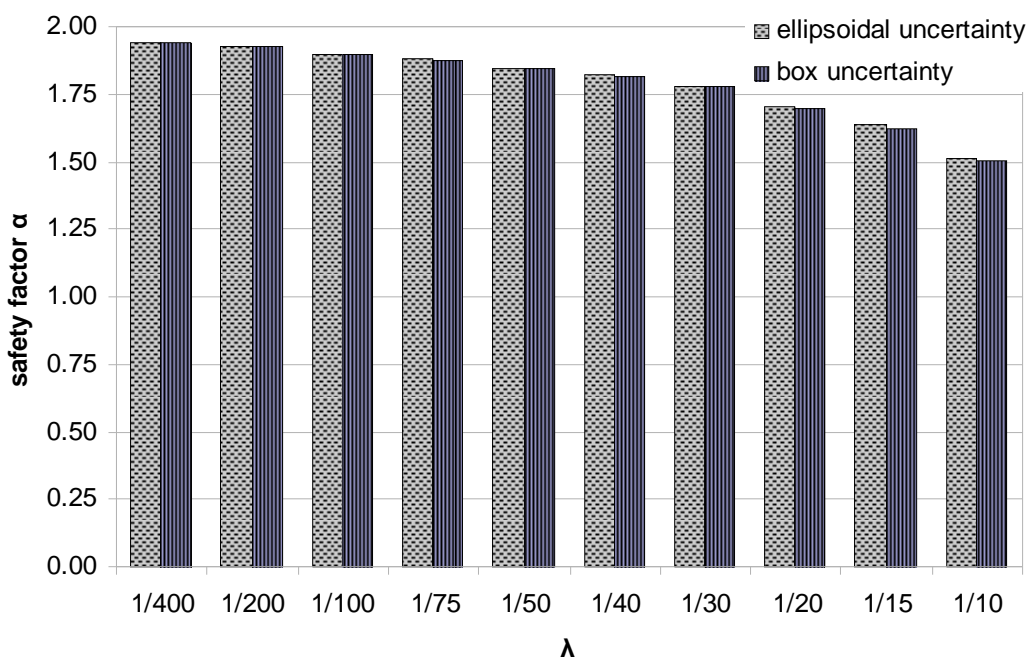
Ο φορέας διακριτοποιείται με κλασικά 3-κομβά στοιχεία δοκού Timoshenko με 2 σημεία Gauss ανά στοιχείο [7]. Κάθε στύλος προσομοιώνεται με στοιχεία μήκους 0.5m. Οι κύριες δοκοί μήκους 10m διακριτοποιούνται με 10 στοιχεία ενώ οι δοκοί μήκους 7m και 8m με 8 στοιχεία. Το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων που προκύπτει έχει 170 στοιχεία και 1431 ελεύθερους βαθμούς ελευθερίας. Ως κριτήρια διαρροής λαμβάνονται οι απλές σχέσεις γραμμικής αλληλεπίδρασης κατά τον EC3, γνωστές και ως κριτήρια μορφής αδάμαντος (diamond-shaped) –βλ. και [5]. Το υλικό είναι χάλυβας S235 ( $E = 210\text{GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ).

Το κτίριο παρουσιάζει διαφραγματική λειτουργία των πλακών, επομένως τα οριζόντια φορτία ατελειών ασκούνται στα κέντρα των διαφραγμάτων. Στην πλάκα B1-B2-B3-B4 ασκείται νεκρό φορτίο  $g = 3.5\text{ kN/m}^2$  και κινητό  $q = 5\text{ kN/m}^2$ . Στις πλάκες C1-C2-C3-C4 και B3-B4-B5-B6 ασκείται νεκρό φορτίο  $g = 4.5\text{ kN/m}^2$ , κινητό φορτίο  $q = 1.5\text{ kN/m}^2$  και φορτίο χιονιού  $s = 1\text{ kN/m}^2$ . Τα κατακόρυφα φορτία των πλακών παραλαμβάνονται από το σύστημα των εικονιζόμενων ισαπέχουσων αμφιαρθρωτών διαδοκίδων. Η συνολική φόρτιση  $p_{(ολ)} = g + q + s$  αποτελεί το κεντρικό τμήμα της φόρτισης  $\Phi^{(c)}$ .

Οι ατέλειες συστήματος κατά x και y αποτελούν την αβέβαιη φορτιστική διατάραξη του συστήματος  $\Phi^{(m)}$  κατά τα ανωτέρω εκτεθέντα. Στην παρούσα εργασία εκτελείται παραμετρική επίλυση για διάφορες τιμές του πολλαπλασιαστή ατελειών  $\lambda$ , τόσο για ελλειψοειδή όσο και ανεξάρτητη αβεβαιότητα. Τα προκύψαντα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού επιλύθηκαν με το λογισμικό SeDuMi [8].

$\lambda$	Μη-συζευγμένα φορτία ατελειών	Σφαιρικά συζευγμένα φορτία
1/400	1.9377	1.9380
1/200	1.9235	1.9242
1/100	1.8949	1.8970
1/75	1.8766	1.8793
1/50	1.8416	1.8449
1/40	1.8159	1.8200
1/30	1.7744	1.7798
1/20	1.6969	1.7046
1/15	1.6259	1.6354
1/10	1.5003	1.5127

Πιν. 1: Συντελεστής ασφαλείας  $\alpha$  για διάφορες στάθμες ατελειών  $\lambda$



Σχ. 3: Επιρροή της στάθμης ατελειών  $\lambda$  στο συντελεστή ασφαλείας  $\alpha$  για ασύζευκτα και σφαιρικά συζευγμένα φορτία ατελειών συστήματος

Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον Πιν.1. και στο Σχ. 3. Όπως είναι φανερό, ο τύπος της αβεβαιότητας φόρτισης (ανεξάρτητη κατά τις δύο οριζόντιες κατευθύνσεις είτε σφαιρικά συζευγμένη) ελάχιστα επηρεάζει την συντελεστή ασφάλειας  $\alpha$  σε πλαστική κατάρρευση

για το κτίριο που μελετήθηκε. Η επιρροή της στάθμης  $\lambda$  φαίνεται να είναι μεγαλύτερη, περιορίζεται όμως στο δεύτερο δεκαδικό ψηφίο του συντελεστή ασφάλειας. Είναι εύλογο να υποθέσει κανείς πως οι ανωτέρω επιρροές θα ήταν μεγαλύτερες, αν το κτίριο είχε περισσότερους ορόφους. Στην τελευταία όμως περίπτωση η επιρροή του οριζόντιου ανέμου θα ήταν πολύ μεγαλύτερη και συνεπώς η επιρροή των ατελειών συστήματος μπορεί να αγνοηθεί, σύμφωνα άλλωστε με το πνεύμα των προνοιών της τελευταίας έκδοσης του EC3.

## 6. ΣΧΟΛΙΑ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Παρουσιάστηκε μεθοδολογία παραμετρικής οριακής ανάλυσης χωρικών μεταλλικών πλαισίων η οποία συμπεριλαμβάνει την φορτιστική αβεβαιότητα λόγω των οριζοντίων φορτίων ορόφων, που είναι ισοδύναμα προς τις ατέλειες συστήματος. Το πρόβλημα ανάχθηκε σε αντίστοιχο ειδικό πρόβλημα προσαρμογής, για το οποίο αναπτύχθηκαν πρόσφατα τεχνικές επίλυσης. Όπως δείχθηκε και σε παράδειγμα, η μεθοδολογία αυτή επιτρέπει την αποτίμηση της στιβαρότητας/ευαισθησίας του συντελεστή ασφάλειας σε πλαστική κατάρρευση ως προς την επιρροή των ατελειών συστήματος.

## 7. ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Οι συγγραφείς επιθυμούν να εκφράσουν τις ευχαριστίες τους προς την Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας για την οικονομική υποστήριξη που παρεσχέθηκε στα πλαίσια της Επιστημονικής Συνεργασίας Ελλάδας-Τσεχίας (Έρευνητ. Πρόγραμμα #4.3.6.1γ-201: «Large-scale computational optimization techniques in the evaluation of behavior and bearing capacity of civil and mechanical engineering structures”).

## 8. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] KAMENJARZH J. *Limit analysis of solids and structures*, 1996, CRC Press, Boca Roton.
- [2] COHN M.Z. and MAIER G. (Eds) *Engineering plasticity by mathematical programming*, 1977, Pergamon Press, New York.
- [3] SMITH DL (Ed) *Mathematical programming methods in structural plasticity*, 1993, Springer, Vienna.
- [4] KOENIG J.A. *Shakedown of elastic-plastic structures*, 1987, Elsevier, Amsterdam.
- [5] BISBOS C.D. and AMPATZIS A.T. “Shakedown analysis of spatial frames with parameterized load domain”, *Engineering Structures*, 2008 (accepted).
- [6] SKORDELI M.-A., BISBOS C.D. and KOCVARA M “Robustness of aluminium sheets against plastic collapse under uncertain loading”, *6<sup>th</sup> GRACM International Congress on Computational Mechanics* to be held at Thessaloniki, 19-21 June 2008 (accepted).
- [7] BATHE K.-J. *Finite Element Procedures*, 1996, Prentice-Hall, New Jersey.
- [8] STURM J.F. “Implementation of interior point methods for mixed semidefinite and second order cone optimization problems”, *Optimization Methods and Software*, Vol.17, 2002, 1105-1154.

**PLASTIC ROBUSTNESS OF SPATIAL STEEL FRAMES  
AGAINST SYSTEM IMPERFECTIONS****Christos D. Bisbos**

Professor

Institute of Metal Structures, Dept. of Civil Engng., Aristotle University  
54124 Thessaloniki, Greece  
e-mail: [cbisbos@civil.auth.gr](mailto:cbisbos@civil.auth.gr)

**Mary-Anna A. Skordeli**

Civil Engineer, Graduate Student

Institute of Metal Structures, Dept. of Civil Engng., Aristotle University  
54124 Thessaloniki, Greece  
e-mail: [cbisbos@civil.auth.gr](mailto:cbisbos@civil.auth.gr)

**SUMMARY**

The present work addresses the sensitivity/robustness of the limit analysis safety factor of spatial steel frames against the loading perturbation induced by the frame system imperfections. This loading perturbation can be viewed as an unknown-but-bounded uncertainty and the robust limit analysis problem leads to an equivalent shakedown analysis problem. In both problems, i.e. in the limit analysis and in the shakedown problem, linearized yield criteria (plastic interaction curves) have been considered. This study encompasses two types of horizontal loadings, induced by the system imperfections and acting at the master joints of the rigid floor diaphragms:

- uncoupled loadings, independently acting in the two horizontal directions
- spherically coupled loadings

It is noteworthy that even though the first case leads to a regular linear programming problem, the second case leads to a linear semi-infinite problem. Both problems can be treated effectively using the computational techniques developed in [5].

Moreover, a parameter  $\lambda$  has been introduced in order to explicitly incorporate the level of the intensity of the system imperfection loadings (in EC3  $\lambda$  takes the value of 1/200). This way, a computational methodology has been presented, useful for systematic parametric analyses capable to capture the robustness of the plastic collapse safety against loading perturbation due to frame system imperfections. The respective parametric study of a two-bay, two-storey spatial steel frame with vertical irregularity serves as an illustrative example.