

**ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟ  
ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ TRIC: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΕ ΚΕΛΥΦΗ ΚΑΙ  
ΠΛΑΙΣΙΑΚΟΥΣ ΜΕΤΑΛΛΙΚΟΥΣ ΦΟΡΕΙΣ**

**Κωνσταντίνος Ι. Νικολάου**

Πολιτικός Μηχανικός, Msc  
Εργαστήριο Στατικής & Αντισεισμικών Ερευνών  
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
e-mail: [civkonikola@yahoo.gr](mailto:civkonikola@yahoo.gr)

**Μανώλης Παπαδρακάκης**

Πολιτικός Μηχανικός, Καθηγητής  
Εργαστήριο Στατικής & Αντισεισμικών Ερευνών  
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 15780 Αθήνα, Ελλάδα  
e-mail: [mpapadra@central.ntua.gr](mailto:mpapadra@central.ntua.gr)

**Νικόλαος Δ. Λαγάρος**

Πολιτικός Μηχανικός, Λέκτορας  
Εργαστήριο Στατικής & Αντισεισμικών Ερευνών  
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 15780 Αθήνα, Ελλάδα  
e-mail: [nlagaros@central.ntua.gr](mailto:nlagaros@central.ntua.gr)

## **1. ΠΕΡΙΛΗΨΗ**

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε με σκοπό την παρουσίαση του τριγωνικού πεπερασμένου στοιχείου TRIC, την επέκταση της ανάλυσης στην μη γραμμική συμπεριφορά γεωμετρίας και υλικού μεταλλικών κατασκευών. Με τα σημερινά δεδομένα η μελέτη μεταλλικών κατασκευών με φέροντα οργανισμό ραβδωτών δομικών στοιχείων γίνεται με ραβδωτά πεπερασμένα στοιχεία τύπου δοκού-στύλου. Η προσομοίωση αυτή υστερεί ως προς τη ποιότητα των αποτελεσμάτων της επίλυσης. Η προσομοίωση τέτοιων φορέων με στοιχεία κελύφους ή και με τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία μέχρι πρότινος είχε μειονεκτήματα, ένα από τα οποία ήταν ο απαγορευτικός υπολογιστικός χρόνος. Στην εργασία αυτή περιγράφεται η μέθοδος των φυσικών μορφών, στην οποία στηρίζεται το TRIC, η οποία επιφέρει μείωση της τάξεως του προβλήματος διαχωρίζοντας τις

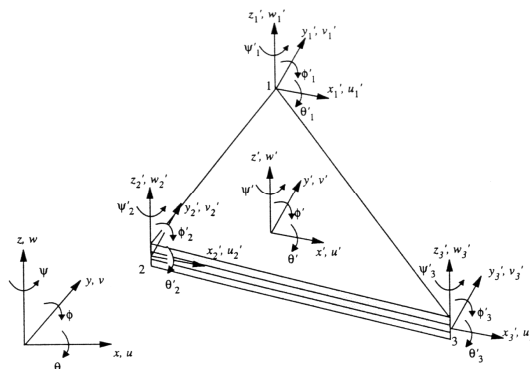
μετατοπίσεις ενός στοιχείου σε μετατοπίσεις στέρεου σώματος, που δεν συμβάλλουν στην ένταση του φορέα και σε φυσικές μορφές ή μορφές παραμόρφωσης. Δίνονται οι τύποι υπολογισμού των τάσεων και των εντατικών μεγεθών, τα κριτήρια διαρροής, ενώ χρησιμοποιείται η επαναληπτική διαδικασία Newton-Raphson με την οποία γίνεται η επίλυση των μη γραμμικών εξισώσεων. Υπολογίζεται το μητρώο δυσκαμψίας στο φυσικό και Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Γίνεται μη γραμμική ανάλυση διαφόρων τύπων κελυφών με τη βοήθεια του προγράμματος Nastran καθώς και με κώδικα σε γλώσσα Fortran του στοιχείου TRIC. Τέλος προσομοιώθηκε ένα μεταλλικό πλαίσιο και μια διώροφη μεταλλική κατασκευή με ραβδωτά και τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία. Γίνεται η σύγκριση με τη βιβλιογραφία και η εξαγωγή συμπερασμάτων ως προς τον υπολογιστικό χρόνο, τις καμπύλες P-δ και τον εντοπισμό τοπικών αστοχιών και λυγισμού των μελών του φορέα.

## 2.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το πεπερασμένο στοιχείο TRIC (TRIangular Composite) είναι τριγωνικό επίπεδο και πολυστρωματικό τριγωνικό στοιχείο κελύφους. Το στοιχείο αυτό προτάθηκε από τον καθηγητή κ. Ιωάννη Αργύρη [1] και η θεωρία του βασίζεται στην μέθοδο των φυσικών μορφών. Το TRIC (Σχ.1) μπορεί να προσομοιώσει όχι μόνο κελύφη αλλά και άλλους φορείς-κατασκευές από πολυστρωματικά και ανομοιογενή υλικά υποβαλλόμενα σε μεγάλου εύρους μετατοπίσεις, εκτελώντας ελαστικές και μη γραμμικές αναλύσεις υλικού και γεωμετρίας. Το πλεονέκτημα αυτό έδωσε τη δυνατότητα προσομοίωσης μεταλλικών κατασκευών με το TRIC και σύγκριση με τη προσομοίωση στοιχείων δοκού όπου είναι η συνηθισμένη αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων σήμερα.

Το στοιχείο TRIC παρουσιάζει τα εξής πλεονεκτήματα σε σχέση με τις άλλες κατηγορίες στοιχείων κελύφους :

- α. Όλα τα ολοκληρώματα γίνονται αναλυτικά
- β. Μείωση των διαστάσεων του μητρώου δυσκαμψίας στο φυσικό σύστημα, συνεπώς και λιγότερες πράξεις άρα και μικρότερος υπολογιστικός χρόνος
- γ. Ικανοποιεί τον έλεγχο συρραφής (Patch test)
- δ. Είναι απαλλαγμένο από το φαινόμενο της παρασιτικής δυσκαμψίας (shear locking).
- ε. Επειδή πρόκειται για πολυστρωματικό υλικό υπάρχει η δυνατότητα αναλυτικού υπολογισμού των τάσεων σε κάθε στρώση του στοιχείου. Έτσι μπορεί εύκολα, με μεγάλη ακρίβεια να βρεθεί αν μια στρώση έχει διαρρεύσει ή όχι σε κάθε στοιχείο.



Σχ. 1: Τριγωνικό Πεπερασμένο Στοιχείο TRIC

### 3.ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Η μέθοδος των Φυσικών Μορφών (Natural modes method), η οποία εφαρμόζεται για την ανάλυση του στοιχείου TRIC, έχει ως κύριο χαρακτηριστικό της, την μείωση της τάξεως του προβλήματος διαχωρίζοντας τις φυσικές μετατοπίσεις για κάθε στοιχείο σε φυσικές μορφές στερεού σώματος  $\rho_0$  (natural rigid body modes) [2] οι οποίες δεν έχουν συνεισφορά στην ενέργεια παραμόρφωσης και σε φυσικές μορφές παραμόρφωσης  $\rho_N$  (natural straining modes) οι οποίες περιγράφουν πλήρως την παραμορφωσιακή κατάσταση του στοιχείου. Μόνο οι μορφές παραμόρφωσης εισάγονται στον υπολογισμό του μητρώου ακαμψίας, συνεπώς:

18 καρτεσιανοί βαθμοί ελευθερίας - 6 κινήσεις στερεού σώματος = 12 παραμορφωσιακές μορφές.

Το φυσικό σύστημα “αβγ”, οι άξονες του οποίου ταυτίζονται με τις πλευρές του τριγώνου οι ανηγμένες αξονικές παραμορφώσεις  $\gamma_t$  και  $\gamma'$  στο φυσικό και τοπικό σύστημα αντίστοιχα συνδέονται μέσω του μητρώου {B} (1).

$$\gamma_t = B^t \gamma' \Rightarrow \begin{Bmatrix} \gamma_{ta} \\ \gamma_{tb} \\ \gamma_{tc} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{ax'}^2 & s_{ax'}^2 & \sqrt{2}c_{ax'}s_{ax'} \\ c_{\beta x'}^2 & s_{\beta x'}^2 & \sqrt{2}c_{\beta x'}s_{\beta x'} \\ c_{\gamma x'}^2 & s_{\gamma x'}^2 & \sqrt{2}c_{\gamma x'}s_{\gamma x'} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{x'x'} \\ \gamma_{y'y'} \\ \sqrt{2}\gamma_{x'y'} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

όπου  $cax' = \cos ax'$ ,  $sax' = \sin ax'$  δηλαδή οι γωνίες που σχηματίζουν οι κορυφές του τριγώνου σε σχέση με τον τοπικό άξονα  $x'$ . Οι αξονικές παραμορφώσεις περιλαμβάνουν τις αξονικές μορφές  $\gamma_a^0$  (axial mode) και τις συμμετρικά καμπτικές μορφές  $\psi_s$  (symmetric bending mode).

Η σχέση που συνδέει τις εγκάρσιες φυσικές διατμητικές παραμορφώσεις με τις εγκάρσιες καρτεσιανές, λόγω γεωμετρικών σχέσεων είναι (2):

$$\gamma_s = T_s \gamma_s' \Rightarrow \begin{Bmatrix} \gamma_{sa} \\ \gamma_{sb} \\ \gamma_{sc} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{ax'} & s_{ax'} \\ c_{\beta x'} & s_{\beta x'} \\ c_{\gamma x'} & s_{\gamma x'} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Στο διάλυμα των φυσικών αξονικών ανηγμένων παραμορφώσεων αντιστοιχεί το

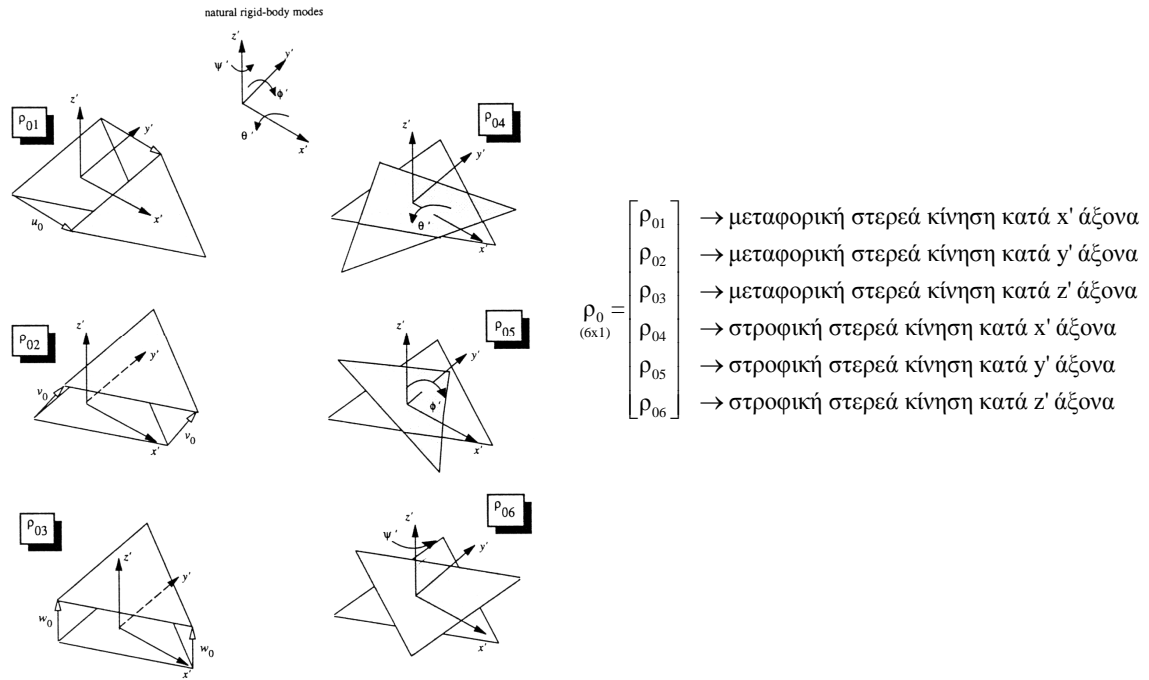
$$\sigma_c = \begin{Bmatrix} \sigma_{ca} \\ \sigma_{cb} \\ \sigma_{c\gamma} \end{Bmatrix}$$

διάλυμα των αξονικών φυσικών τάσεων  $\sigma_c$  : Στο διάλυμα των φυσικών εγκάρσιων διατμητικών ανηγμένων παραμορφώσεων  $\gamma_s$  αντιστοιχεί το διάλυμα των εγκάρσιων φυσικών διατμητικών τάσεων  $\sigma_s$  (natural transverse shear stresses -  $\sigma_s$ ) (3).

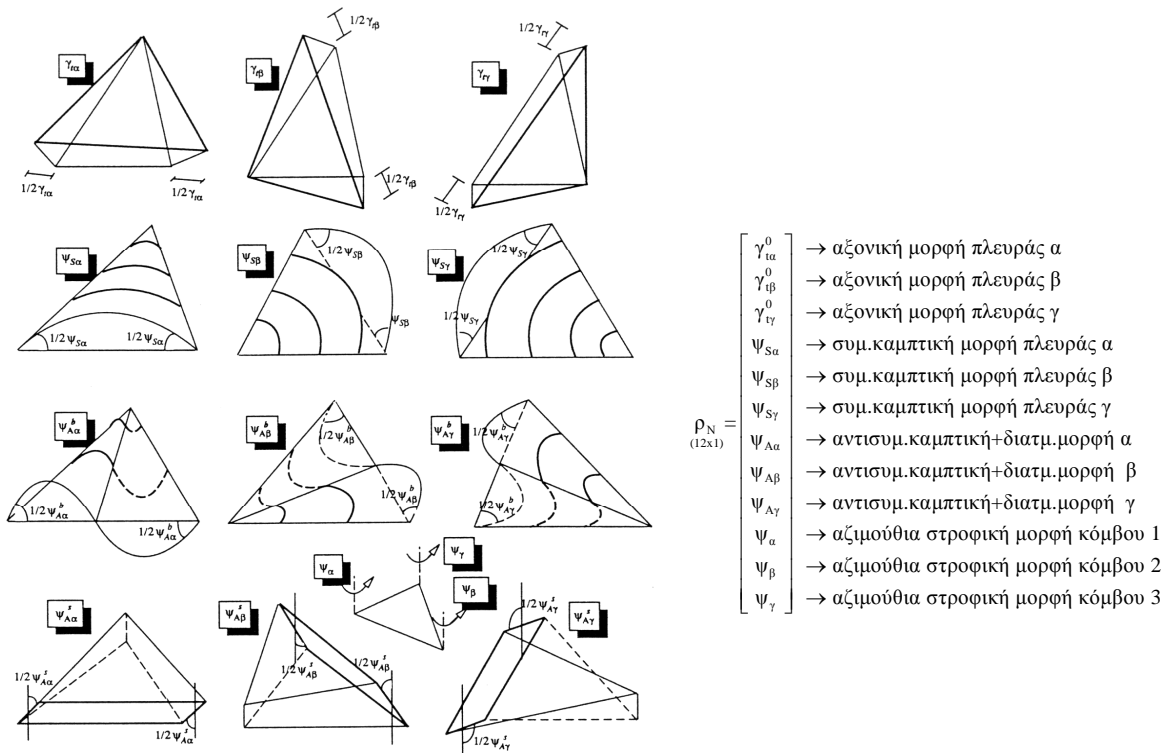
$$\sigma_s = T_s \sigma_s' \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{sa} \\ \sigma_{sb} \\ \sigma_{sc} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{ax'} & s_{ax'} \\ c_{\beta x'} & s_{\beta x'} \\ c_{\gamma x'} & s_{\gamma x'} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'z'} \\ \sigma_{y'z'} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Συνολικά οι σχέσεις των φυσικών τάσεων και παραμορφώσεων με τα αντίστοιχα καρτεσιανά μεγέθη δίνονται από τον τύπο(4):

$$\begin{Bmatrix} \gamma_c \\ \sigma_c \\ \gamma_s \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B^t & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & B^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & T_s & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & T_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma' \\ \sigma' \\ \gamma'_s \\ \sigma'_s \end{Bmatrix} \quad (4)$$



Σχ.2: Οι φυσικές μορφές στερεού σώματος  $\rho_0$



Σχ. 3: Οι φυσικές μορφές παραμόρφωσης  $\rho_N$

Για τον υπολογισμό του καταστατικού μητρώου στο φυσικό σύστημα ακολουθείται ο παρακάτω μετασχηματισμός:

σύστημα υλικού  $\mapsto$  τοπικό σύστημα  $\mapsto$  φυσικό σύστημα

Όπως φαίνεται από τη σχέση (5) δεν υπάρχουν όροι σύζευξης μεταξύ αξονικών τάσεων και των εγκάρσιων διατμητικών φυσικών παραμορφώσεων. Όπου  $k= 1, \dots, N$  είναι ο αριθμός των στρώσεων του στοιχείου.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{ca} \\ \sigma_{cb} \\ \sigma_{cg} \\ \sigma_{sa} \\ \sigma_{sb} \\ \sigma_{sg} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \kappa_{aa} & \kappa_{ab} & \kappa_{ag} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \kappa_{ba} & \kappa_{bb} & \kappa_{bg} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \kappa_{ga} & \kappa_{gb} & \kappa_{gg} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \chi_{aa} & \chi_{ab} & \chi_{ag} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \chi_{ba} & \chi_{bb} & \chi_{bg} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \chi_{ga} & \chi_{gb} & \chi_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{ta} \\ \gamma_{tb} \\ \gamma_{tg} \\ \gamma_{sa} \\ \gamma_{sb} \\ \gamma_{sg} \end{Bmatrix}_k \quad \text{ή} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_c \\ \sigma_s \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \kappa_{ct} & \cdot \\ \cdot & \chi_s \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_t \\ \gamma_s \end{Bmatrix}_k \quad (5)$$

Το συνολικό μητρώο ακαμψίας (6) που προκύπτει περιλαμβάνει τους όρους:

α. Το 12x12 φυσικό μητρώο ακαμψίας  $k_N(\gamma_t, \psi_s)$ , διαθέτει μόνο όρους λόγω αξονικής παραμόρφωσης και συμμετρικής κάμψης. Για ένα ισότροπο στοιχείο ή ένα συμμετρικό σύνθετο πολύστρωτο στοιχείο οι συζευγμένοι όροι αξονικής και καμπτικής έντασης μηδενίζονται.

β. Το μητρώο ακαμψίας  $k_A^b$  λόγω αντισυμμετρικών καμπτικών μορφών υπολογίζεται από τη μεταβολή της ενέργειας παραμόρφωσης βάση της αρχής των δυνατών έργων:

γ. Το μητρώο ακαμψίας  $k_A^s$ , λόγω αντισυμμετρικών διατμητικών μορφών. Συνεπώς λαμβάνοντας υπόψιν μας όλους τους παραπάνω όρους δυσκαμψίας, προκύπτει το φυσικό μητρώο δυσκαμψίας (6):

$$\begin{matrix} k_N = \Omega \\ 12 \times 12 \end{matrix} \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} & k_{ag} & \frac{z}{l_a} k_{aa} & \cdot & \frac{z}{l_b} k_{ab} & \cdot & \frac{z}{l_\gamma} k_{ag} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & k_{bb} & k_{bg} & \frac{z}{l_a} k_{ab} & \cdot & \frac{z}{l_b} k_{bb} & \cdot & \frac{z}{l_\gamma} k_{bg} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & k_{gg} & \frac{z}{l_a} k_{ag} & \cdot & \frac{z}{l_b} k_{bg} & \cdot & \frac{z}{l_\gamma} k_{gg} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{z^2}{l_a^2} k_{aa} & \cdot & \frac{z^2}{l_a l_b} k_{ab} & \cdot & \frac{z^2}{l_a l_\gamma} k_{ag} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_A^{\alpha\alpha} & \cdot & k_A^{\alpha\beta} & \cdot & k_A^{\alpha\gamma} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{z^2}{l_b^2} k_{bb} & \cdot & \frac{z^2}{l_b l_\gamma} k_{bg} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_A^{\beta\beta} & \cdot & k_A^{\beta\gamma} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{z^2}{l_\gamma^2} k_{gg} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_A^{\gamma\gamma} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_z^{\alpha\alpha} & k_z^{\alpha\beta} & k_z^{\alpha\gamma} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_z^{\beta\beta} & k_z^{\beta\gamma} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_z^{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Στην συνέχεια, ένας τελικός μετασχηματισμός οδηγεί στο καθολικό μητρώο ακαμψίας  $\{K\}$  κάθε στοιχείου (7)

$$K = \underbrace{\left[ T_{06}^t \left[ \underbrace{\alpha_N^t \underbrace{k_N^i}_{12 \times 12} \alpha_N^i}_{18 \times 18} \right] T_{06} \right]}_{18 \times 18} \quad (7)$$

#### 4.ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

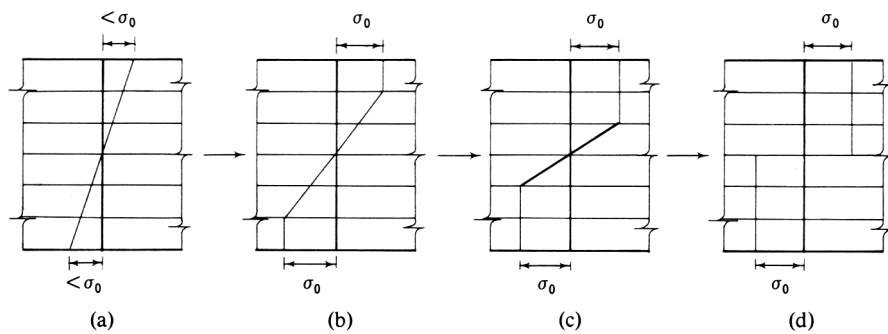
Στη διάρκεια επιβολής μιας αύξησης του φορτίου, τα στοιχεία που διακριτοποιούν το φορέα μπορεί να περάσουν πλήρως ή μερικώς στην πλαστική περιοχή. Οι τάσεις και ανηγμένες παραμορφώσεις υπολογίζονται στο μέσο κάθε στρώσης. Κατά συνέπεια ένα στοιχείο μπορεί να συμπεριφέρεται μερικώς ελαστικά και μερικώς ελαστοπλαστικά αν μερικές στρώσεις του στοιχείου περάσουν στην πλαστική περιοχή, ή πλήρως πλαστικά αν όσες οι στρώσεις διαρρεύσουν.

Για την μη γραμμική ανάλυση με το πεπερασμένο στοιχείο Tric υιοθετείται η επαναληπτική διαδικασία Newton-Raphson [3] με την οποία γίνεται η επίλυση των μη γραμμικών εξισώσεων και το κριτήριο διαρροής κατά Von Mises. Η διαδικασία της ελαστοπλαστικής ανάλυσης που υιοθετείται είναι η ακόλουθη:

Έστω ότι βρισκόμαστε στην  $i$  επανάληψη του  $m$  επαυξητικού βήματος φόρτισης. Το διάνυσμα της εξωτερικής φόρτισης είναι το διάνυσμα των παραμενουσών δράσεων  $g_{i-1}$  της προηγούμενης επανάληψης. Οι δυνάμεις αυτές οδηγούν σε αύξηση των μετατοπίσεων  $dr_N$  και των αξονικών μορφών  $d\gamma_t$ . Υποθέτοντας ελαστική συμπεριφορά υπολογίζονται η επαυξητική τάση και η συνολική τάση στο μέσο κάθε στρώσης του στοιχείου

$$d\sigma_{ce}^i = \kappa_{ct} d\gamma_t^i \quad (8)$$

$$\sigma_{ce}^i = \sigma_c^{i-1} + \kappa_{ct} d\gamma_t^i$$



Σχ. 4: Διαρροή στρωσιγενούς υλικού

όπου  $\sigma_c^{i-1}$  είναι η τάση στην προηγούμενη επανάληψη. Η τάση αυτή βρίσκεται πάνω ή εντός της επιφάνειας διαρροής. Ο δείκτης  $e$  δείχνει ότι οι τάσεις υπολογίστηκαν ελαστικά. Το επόμενο βήμα εξαρτάται από την κατάσταση στην οποία βρισκόταν η εξεταζόμενη στρώση στην προηγούμενη επανάληψη. Εξετάζεται ποιο μέρος της επαυξητικής τάσης είναι πλαστικό και ποιο ελαστικό και η περίπτωση αποφόρτισης της στρώσης  $\bar{\gamma}_t^{pl} < 0$ . Η συνολική τάση υπολογίζεται μέσω της σχέσης:

$$\sigma_c^i = \sigma_c^{i-1} + d\sigma_{ce} - d\bar{\gamma}_t^{pl} \kappa_{ct} s_N \quad (9)$$

και οι εσωτερικές δυνάμεις από τη σχέση:

$$P_N^i = k_N^{el-pl} P_N \quad (10)$$

Στη συνέχεια η τάση πολλαπλασιάζεται με ένα διορθωτικό συντελεστή  $R$  ώστε να βρίσκεται πάντα πάνω στην επιφάνεια διαρροής.

Έστω ότι στην κατασκευή επιβάλλεται φορτίο  $P$  το οποίο οδηγεί σε παραμόρφωση  $u$  της κατασκευής. Με βάση τη θεωρία μεγάλων μετατοπίσεων αλλά μικρών παραμορφώσεων, η εξίσωση ισορροπίας της κατασκευής γράφεται:

$$K_T u = P \quad (11)$$

όπου  $K_T$  [4],[5] είναι το καθολικό εφαπτομενικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής (12):

$$K_T = [T_{06}^t [\bar{\alpha}_N^t [k_N^{e-pl}] \bar{\alpha}_N] T_{06}] + [T_{06}^t \bar{k}_G T_{06}] + [\bar{\alpha}_N T_{06}]^t k_{NG} [\bar{\alpha}_N T_{06}] \quad (12)$$

Το πιο πάνω μητρώο αναφέρεται στην περίπτωση που λαμβάνεται υπόψη τόσο η γεωμετρική μη γραμμικότητα όσο και η μη γραμμικότητα του υλικού. Στην περίπτωση που λαμβάνεται υπόψη μόνο η γεωμετρική μη γραμμικότητα τότε τη θέση του μητρώου  $k_N^{e-pl}$  παίρνει το ελαστικό μητρώο  $k_N$ , ενώ στην περίπτωση που λαμβάνεται υπόψη μόνο η μη γραμμικότητα του υλικού, τότε το εφαπτομενικό μητρώο (11) περιγράφεται μόνο από τον πρώτο όρο. Στο παραπάνω εφαπτομενικό μητρώο εμφανίζονται τα μητρώα  $\bar{k}_G$  και  $k_{NG}$ . Το  $\bar{k}_G$  αποτελεί τη γεωμετρική δυσκαμψία και υπολογίζεται από το τοπικό στροφικό στερεού σώματος μητρώο δυσκαμψίας  $\bar{k}_{GR}$  (13).

$$\bar{k}_{GR} = \begin{bmatrix} \frac{P_\alpha y_\alpha^2}{I_\alpha^2} + \frac{P_\beta y_\beta^2}{I_\beta^2} + \frac{P_\gamma y_\gamma^2}{I_\gamma^2} & - \left( \frac{P_\alpha x_\alpha y_\alpha}{I_\alpha^2} + \frac{P_\beta x_\beta y_\beta}{I_\beta^2} + \frac{P_\gamma x_\gamma y_\gamma}{I_\gamma^2} \right) & 0 \\ - \left( \frac{P_\alpha x_\alpha y_\alpha}{I_\alpha^2} + \frac{P_\beta x_\beta y_\beta}{I_\beta^2} + \frac{P_\gamma x_\gamma y_\gamma}{I_\gamma^2} \right) & \frac{P_\alpha x_\alpha^2}{I_\alpha^2} + \frac{P_\beta x_\beta^2}{I_\beta^2} + \frac{P_\gamma x_\gamma^2}{I_\gamma^2} & 0 \\ 0 & 0 & P_\alpha + P_\beta + P_\gamma \end{bmatrix} \quad (13)$$

Όπου  $P_\alpha, P_\beta, P_\gamma$  είναι οι μέσου επιπέδου αξονικές φυσικές δυνάμεις και

$$\begin{aligned} x_\alpha &= l_\alpha c_{\alpha x'} = x'_3 - x'_2, & y_\alpha &= l_\alpha c_{\alpha y'} = y'_3 - y'_2 \\ x_\beta &= l_\beta c_{\beta x'} = x'_1 - x'_3, & y_\beta &= l_\beta c_{\beta y'} = y'_1 - y'_3 \\ x_\gamma &= l_\gamma c_{\gamma x'} = x'_2 - x'_1, & y_\gamma &= l_\gamma c_{\gamma y'} = y'_2 - y'_1 \end{aligned} \quad (14)$$

Συνεπώς η μεταφορά του φυσικού γεωμετρικού μητρώου δυσκαμψίας από το τοπικό, στο καθολικό σύστημα γίνεται από την σχέση (15):

$$\bar{k}_G = \bar{\alpha}_{0R}^t \bar{k}_{GR} \bar{\alpha}_{0R} \quad (15)$$

(18x18)    (18x3) (3x3) (18x3)

Ωστόσο σε καμπτικά φαινόμενα αρκετά συχνά οι μεμβρανικές δυνάμεις είναι αρκετά μεγάλες και σε αυτή τη περίπτωση αξίζει να προστεθεί ένα φυσικό μητρώο δυσκαμψίας  $k_{NG}$  [6] το οποίο θα προέρχεται από τη σύζευξη αξονικών δυνάμεων και συμμετρικά καμπτικών μορφών. Αυτό το φυσικό μητρώο δυσκαμψίας περιλαμβάνει το διαγώνιο μητρώο (16):

$$k_{NG} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & P_\alpha & \cdot & P_\beta & \cdot & P_\gamma & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & P_\alpha & \cdot & P_\beta & \cdot & P_\gamma & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (16)$$

## 5.ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΕ ΜΕΤΑΛΛΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

Με τα θεωρητικά πλεονεκτήματα του TRIC δόθηκε η δυνατότητα, να προσομοιωθούν μεταλλικοί φορείς. Στα παραδείγματα αυτά το ενδιαφέρον εστιάζεται

στην εξαγωγή των διαγραμμάτων φόρτισης – μετακίνησης (P-δ), στο χρόνο εξαγωγής αποτελεσμάτων και στη σύγκλιση του αποτελέσματος με την πύκνωση του δικτύου.

**A. Μεταλλικό Πλαίσιο**

Το μεταλλικό πλαίσιο από χάλυβα Fe430 διαθέτει ύψος υποστυλωμάτων 4.0m και άνοιγμα δοκού 6.0m. Η επαναληπτική μέθοδος που ακολουθήθηκε είναι η πλήρης μέθοδος Newton-Raphson. Το κριτήριο διαρροής είναι κατά Von-Mises και ο νόμος της κράτυνσης είναι ο ιστροπικός. Οι στηρίξεις των υποστυλωμάτων είναι πλήρεις πακτώσεις.

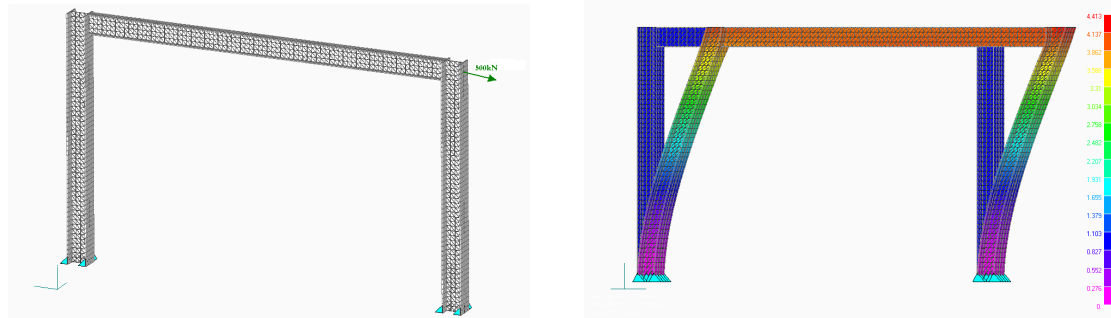
Διατομές	Υλικό	Nodes	Elements	Φορτίο kN	Κόμβος Φόρτισης
HEB-IPE 300	Fe430	2115	3824	500kN	1736

Πιν.1: Δεδομένα μεταλλικού πλαισίου

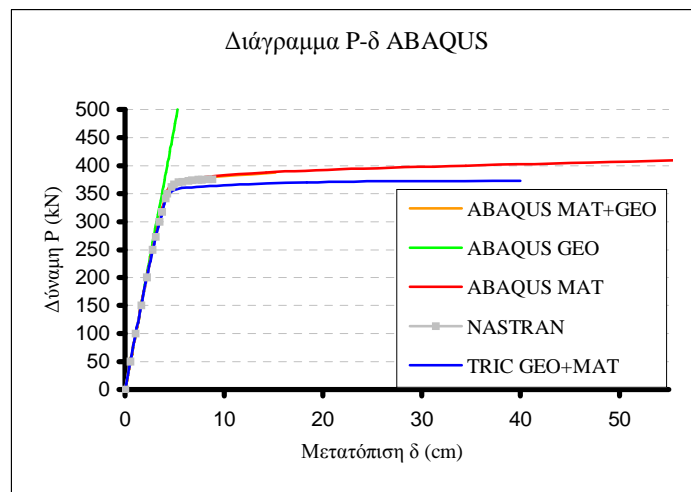
Κράτυνση	Τάση Διαρροής	Λόγος Poisson	Μέτρο Ελαστικότητας	Φορτιστικά Βήματα	Επαναλήψεις
$E_T(kN/cm^2)$	$f_y(kN/cm^2)$	$\nu$	$E(kN/cm^2)$		
0,0	43,0	0,3	21.000	25	18

Πιν.2: Δεδομένα μεταλλικού διώροφου πλαισίου

Οι αναλύσεις έγιναν για γεωμετρική μη γραμμικότητα (GEO), για μη γραμμικότητα του υλικού (MAT) και για τα δύο είδη μη γραμμικότητας (GEO+MAT).



Σχ.5: Δίκτυο τριγωνικών στοιχείων Μετατοπίσεις με load factor 0,7 (Φόρτιση 350kN- Έναρξη Μη Γραμμικής Ανάλυσης)



Σχ. 6: Αποτελέσματα ανάλυσης του μεταλλικού φορέα με πεπερασμένα στοιχεία Tric (Επεξήγηση: MAT=material και GEO=geometry)

**B. Διώροφη Μεταλλική Κατασκευή**

Ο φορέας που μοντελοποιήθηκε σε αυτό το παράδειγμα, είναι μια τυπική διώροφη μεταλλική κατασκευή από χάλυβα Fe430. Αποτελείται στην μια όψη από τρία φατνώματα



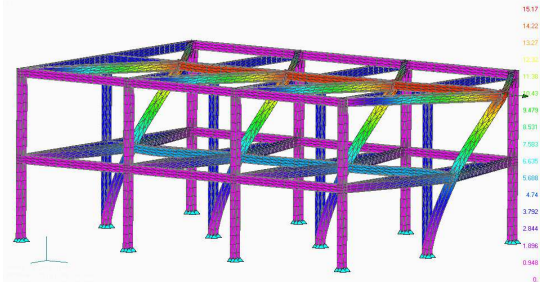
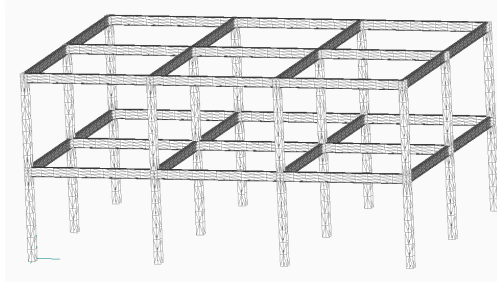
τα οποία έχουν μήκος 6,0μ. ενώ στην άλλη όψη αποτελείται από δυο φατνώματα με μήκος 5,5μ. Τα ύψη στους δυο ορόφους είναι 3,8μ. και 4,0μ. Αντίστοιχα. Τα υποστυλώματα αποτελούνται από διατομές HEB 300 και οι δοκοί από διατομές IPE 400.

Οι στηρίξεις των υποστυλωμάτων είναι πλήρεις πακτώσεις. Η φόρτιση σε όλες τις διακριτοποιήσεις ήταν ίδια. Το φορτίο που επιβαλλόταν ήταν ένα συγκεντρωμένο φορτίο πάνω στον κόμβο που βρισκόταν στον δεύτερο όροφο του μεσαίου υποστυλώματος της δεύτερης όψης.

Διακριτοποίηση Δίκτυο	Βαθμοί Ελευθερίας	Nodes	Elements	Κόμβος Φόρτισης	Χρόνος sec
Αραιό Τριγωνικό	27840	4724	8560	4432	27
Πυκνό Τριγωνικό	38016	6420	11516	5886	117
Αραιό Δοκού	144	36	58	32	3095
Πυκνό Δοκού	3576	608	630	353	5360

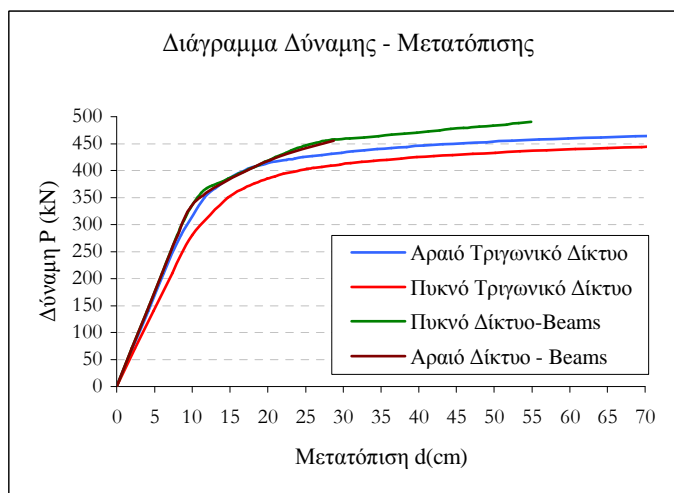
Πιν.3: Δεδομένα μεταλλικού δώροφου πλαισίου

Επειδή η ανάλυση γίνεται για μη γραμμικότητα υλικού αλλά και γεωμετρίας θα αυξάνεται το φορτίο (με load factor) ώστε να πάρουμε τη πλήρη καμπύλη φορτίου-μετακίνησης σε ελαστική και μη γραμμική περιοχή. Η μέγιστη τιμή του φορτίου είναι 700kN (Σχ.8). Η επαναληπτική μέθοδος που ακολουθήθηκε είναι η πλήρης μέθοδος Newton-Raphson. Το κριτήριο διαρροής είναι κατά Von-Mises και ο νόμος της κράτυνσης είναι ο ιστροπικός (Πιν.2).



Σχ. 7: Διακριτοποίηση Φορέα με τριγωνικά στοιχεία και αποτελέσματα ανάλυσης. Μετατοπίσεις με load factor 0,5 (Φόρτιση 350kN- Εναρξη Μη Γραμμικής Ανάλυσης)

Χρησιμοποιήθηκε το κριτήριο σύγκλισης εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων και το κριτήριο του έργου ήταν ίσο με 0,001.



Σχ. 8: Αποτελέσματα ανάλυσης του μεταλλικού φορέα με τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία και στοιχεία δοκού

## 6.ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι αναλύσεις μεταλλικών φορέων με το στοιχείο Tric είναι αξιόπιστες σε σύγκριση με την ανάλυση προγραμμάτων όπως το Nastran και το Abaqus. Επιπλέον επειδή τα ολοκληρώματα γίνονται αναλυτικά και μειώνονται οι διαστάσεις του μητρώου δυσκαμψίας στο φυσικό σύστημα, απαιτούνται λιγότερες πράξεις άρα και μικρότερος υπολογιστικός χρόνος. Ο υπολογιστικός χρόνος δημιουργούσε πρόβλημα στις επιλύσεις με αυτά τα στοιχεία ως σήμερα για κατασκευές όπως οι μεταλλικές στις οποίες υπάρχουν χιλιάδες βαθμοί ελευθερίας. Σε σχέση με τα στοιχεία δοκού η ανάλυση των μεταλλικών κατασκευών με στοιχεία κελύφους πλεονεκτεί στην ποιότητα των αποτελεσμάτων αλλά και στον εντοπισμό φαινομένων όπως του τοπικού λυγισμού που ένα στοιχείο δοκού δεν μπορεί να αποδώσει.

## 7.ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] ARGYRIS J.H., BALMER H., DOLTSINIS J. ST., DUNNE P.C., HAASE M., KLEIBER M., MALEJANNAKIS G. A., MLEJNEK H. P., MULLER M., SCHARF D. W., Finite element method - the natural approach-, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 17/18:1-106, 1979.
- [2] ARGYRIS J.H., BONI B., HINDERLANG U. AND KLEIBER M., Finite element analysis of two - and three dimensional elasto-plastic frames - The natural Approach, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 35 (1982) 221-248.
- [3] ARGYRIS J.H., PAPADRAKAKIS M., APOSTOLOPOULOU C., KOUTSOURELAKIS S., The TRIC shell element: theoretical and numerical investigation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 182 (2000) 217-245, 1999.
- [4] ARGYRIS J., TENEK L., OLOFSSON L., TRIC: a simple but sophisticated 3-node triangular element based on 6 rigid body and 12 straining modes for fast computational of arbitrary isotropic and laminated composite shells, Comput. Methods Appl. Mech. Eng, 145 (1997) 11-85.
- [5] ΠΑΠΑΔΡΑΚΑΚΗΣ ΜΑΝΟΛΗΣ, Μη γραμμικά Πεπερασμένα Στοιχεία, εκδόσεις ΕΜΠ, 1998
- [6] H. ARGYRIS, D. W. SCHARPF, J. B. SPOONER, Technical Report, No. 46, 1968, University of Stuttgart, Germany.

**ELASTIC AND NON-LINEAR ANALYSIS USING THE TRIANGULAR FINITE SHELL ELEMENT TRIC: APPLICATIONS TO SHELLS AND METAL CONSTRUCTION FRAMES**

**Konstantinos I. Nikolaou**

Civil Engineer, Msc

Institute of Structural Analysis & Seismic Research

National Technical University of Athens, Greece

e-mail:[civkonikola@yahoo.gr](mailto:civkonikola@yahoo.gr)

**Manolis Papadrakakis**

Civil Engineer, Professor

Institute of Structural Analysis & Seismic Research

National Technical University of Athens Athens, Greece

e-mail:[mpapadra@central.ntua.gr](mailto:mpapadra@central.ntua.gr)

**Nikos D. Lagaros**

Civil Engineer, Lecturer

Institute of Structural Analysis & Seismic Research

National Technical University of Athens, Greece

e-mail:[nlagaros@central.ntua.gr](mailto:nlagaros@central.ntua.gr)

**ABSTRACT**

This paper discusses the characteristics of the triangular finite element TRIC, the implications of the analysis to the non-linear behavior of the geometry and of the material of metal constructions. Currently the design of metal constructions with a beam elements structural system is conducted using the finite beam elements beam-column-type method. The quality of the results stemming from this simulation method has not been satisfactory. The simulation of such constructions with shell elements or with 3d finite elements used so far has presented certain shortcomings, one of which was the significantly low calculation speed. This paper describes the natural mode method – on which TRIC is based – which diminishes substantially the problem, by disaggregating the shifts of a single element into, on one side, the natural rigid body modes, which do not contribute to the load intensity, and, on the other side, the natural straining modes. Included are the yield criteria and the formulas for the calculation of the stress and effects of action. The resolution of non-linear equa-

tions is conducted using the Newton-Raphson methodology, while the stiffness matrix is calculated in the natural and Cartesian system coordinates. There is also linear analysis of several shell types using the Nastran program, as well as leveraging TRIC code in Fortran. Moreover, a metal frame and a two-storage metal construction (cross sections IPE and HEB) have been simulated using both the beam and triangular finite elements. Included are also the comparison with relevant bibliography and the conclusions reached regarding the calculation speed, the P- $\delta$  diagram and the localization of local failure and buckling of the construction members.