

**ΣΤΡΕΠΤΙΚΗ ΚΑΙ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΣΤΡΕΒΛΩΣΗ ΣΤΟ ΧΩΡΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ
ΔΟΚΟΥ ΛΑΜΒΑΝΟΝΤΑΣ ΥΠΟΨΗ ΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΓΕΝΗ ΣΤΡΕΠΤΙΚΗ ΡΟΠΗ
– ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ**

Βασίλειος Γ. Μώκος

Δρ. Πολιτικός Μηχανικός

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, Αθήνα 15780

vgmokos@central.ntua.gr

Ευάγγελος Ι. Σαπουντζάκης

Αναπληρωτής Καθηγητής

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, Αθήνα 15780

cvsapoun@central.ntua.gr

1. ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη μελετητική πρακτική, ακριβής ανάλυση μεταλλικών ραβδωτών φορέων είναι δύσκολο να επιτευχθεί καθώς τα εμπορικά προγράμματα γενικά θεωρούν έξι βαθμούς ελευθερίας σε κάθε κόμβο χωρικού ραβδωτού στοιχείου, αγνοώντας έτσι την επιρροή της στρέβλωσης λόγω στρέψης που προκαλείται από τη δέσμευση της συστροφής στα άκρα του στοιχείου. Στην εργασία αυτή αναπτύσσεται η Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων (BEM) για τη μόρφωση ενός νέου διευρυμένου 14x14 μητρώου στιβαρότητας και του αντίστοιχου μητρώου επικόμβιας φόρτισης χωρικού στοιχείου σταθερής διατομής τυχόντος σχήματος διπλής συμμετρίας, λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή της στρεπτικής στρέβλωσης και των διατμητικών παραμορφώσεων λόγω τέμνουσας δύναμης και δευτερογενούς στρεπτικής ροπής. Οκτώ προβλήματα συνοριακών τιμών αναφορικά με τη συνολική γωνία στρέψης, την πρωτογενή και δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης, τις βυθίσεις, τη διαμήκη μετατόπιση και δυο τασικές συναρτήσεις διατυπώνονται και επιλύονται εφαρμόζοντας τη BEM. Η απόκλιση στα παραμορφωσιακά ή/και εντατικά μεγέθη σε χωρικά ραβδωτά μεταλλικά στοιχεία λόγω αγνόησης της επιρροής των διατμητικών παραμορφώσεων λόγω δευτερογενούς στρεπτικής ροπής καταδεικνύει την αναγκαιότητα συνυπολογισμού αυτής της πρόσθετης επιρροής ειδικά σε μεταλλικά στοιχεία με κλειστή διατομή.

2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

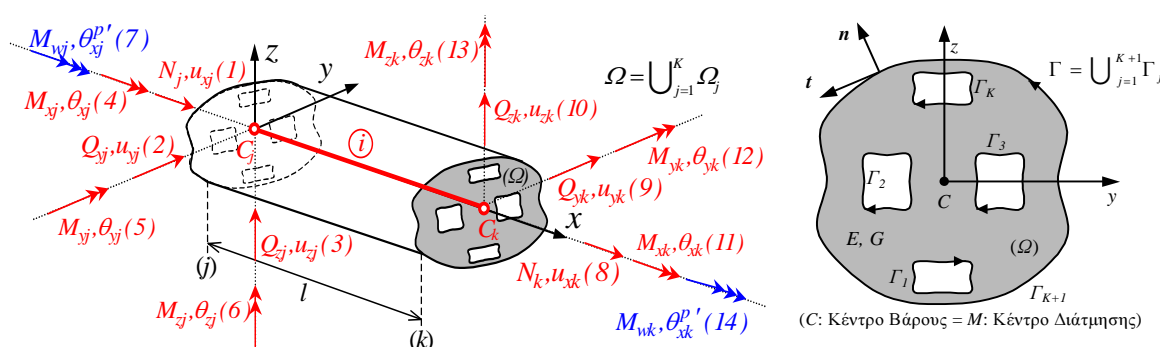
Στη μελετητική πρακτική οι μεταλλικοί φορείς αναλύονται στην πλειονότητα των περιπτώσεων με τη βοήθεια έτοιμων λογισμικών τα οποία λαμβάνουν υπόψη έξι βαθμούς ελευθερίας σε κάθε κόμβο χωρικού ραβδωτού στοιχείου, αγνοώντας έτσι την επιρροή της στρέβλωσης λόγω στρέψης που προκαλείται από τη δέσμευση της συστροφής στα άκρα του στοιχείου. Επιπροσθέτως, λαμβάνουν υπόψη προσεγγιστικά τις διατμητικές

παραμορφώσεις λόγω τέμνουσας δύναμης καθώς αδυνατούν να υπολογίσουν με ακρίβεια τους απαιτούμενους συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης, ενώ αγνοούν πλήρως τις διατμητικές παραμορφώσεις λόγω δευτερογενούς στρεπτικής ροπής. Η ανάλυση στις περιπτώσεις αυτές είναι πιθανόν να οδηγήσει σε υποεκτίμηση των εντατικών ή/και παραμορφωσιακών μεγεθών και επομένως σε μη συντηρητικό σχεδιασμό.

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η παρουσίαση ενός νέου διευρυμένου 14x14 μητρώου στιβαρότητας και του αντίστοιχου μητρώου επικόμβιας φόρτισης χωρικού στοιχείου δοκού σταθερής διατομής τυχόντος σχήματος διπλής συμμετρίας, λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή τόσο της στρεπτικής στρέβλωσης όσο και των διατμητικών παραμορφώσεων λόγω τέμνουσας δύναμης και δευτερογενούς στρεπτικής ροπής. Σε αντίθεση με τα συμβατικά μητρώα στιβαρότητας που συνήθως παράγονται με τη βοήθεια προσεγγιστικών συναρτήσεων σχήματος, στην εργασία αυτή τα προαναφερθέντα μητρώα μορφώνονται αριθμητικά επιλύοντας τις αντίστοιχες κυρίαρχες διαφορικές εξισώσεις εφαρμόζοντας τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων (BEM). Σημειώνεται ότι, τα παρουσιαζόμενα μητρώα είναι απαλλαγμένα από παρασιτικές στιβαρότητες, ενώ όπως προκύπτει από την αναδρομή στην πρόσφατη διεθνή βιβλιογραφία μορφώνονται για πρώτη φορά με τη βοήθεια ολοκληρωτικών εξισώσεων. Σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο διατυπώνονται και επιλύονται οκτώ προβλήματα συνοριακών τιμών αναφορικά με τη συνολική γωνία στρέψης (συνισταμένη της πρωτογενούς και δευτερογενούς γωνίας στρέψης), την πρωτογενή και δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης, τις βυθίσεις, τη διαμήκη μετατόπιση και δυο τασικές συναρτήσεις. Η επιρροή της στρεπτικής στρέβλωσης και των διατμητικών παραμορφώσεων στην ανάλυση μεταλλικών φορέων εξετάζεται μέσα από παραδείγματα με πρακτικό ενδιαφέρον.

3. ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε ραβδωτό στοιχείο χωρικής πρισματικής ράβδου μήκους l με διατομή τυχόντος σχήματος διπλής συμμετρίας απλής ή πολλαπλής συνοχής με μέτρο ελαστικότητας E και διατμήσεως G που καταλαμβάνει το χωρίο Ω του επιπέδου y, z και περικλείεται από τις $K+1$ λείες καμπύλες $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{K+1}$ (Σχ.1).



Σχ.1. Ακραίες δράσεις και μετατοπίσεις στοιχείου χωρικής πρισματικής ράβδου (α) με διατομή τυχόντος σχήματος διπλής συμμετρίας απλής ή πολλαπλής συνοχής (β).

Προκειμένου να συμπεριλάβουμε τη συμπεριφορά έναντι στρεπτικής στρέβλωσης κατά τη μελέτη του προαναφερθέντος στοιχείου, εισάγουμε στα δύο άκρα του στοιχείου έναν έβδομο βαθμό ελευθερίας στους ήδη γνωστούς έξι βαθμούς ελευθερίας του κλασικού στοιχείου χωρικού πλαισίου. Στην «κλασσική» θεωρία ανομοιομορφης στρέψης ράβδου, ο

πρόσθετος αυτός βαθμός ελευθερίας είναι η συστροφή $\theta'_x = d\theta_x/dx$, που δηλώνει το ρυθμό μεταβολής της γωνίας στροφής θ_x κατά μήκος του στοιχείου. Ωστόσο, στη «διευρυμένη» θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου, στην οποία λαμβάνονται υπόψη διατμητικές παραμορφώσεις λόγω δευτερογενούς στρεπτικής ροπής, η συστροφή $\theta'_x = d\theta_x/dx$ διασπάται σε πρωτογενές $\theta_x^{p'} = d\theta_x^p/dx$ και δευτερογενές $\theta_x^{s'} = d\theta_x^s/dx$ τμήμα λόγω της διρροπής και της δευτερογενούς στρεπτικής ροπής, αντίστοιχα. Έτσι, στη διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου ο πρόσθετος βαθμός ελευθερίας είναι η πρωτογενής συστροφή $\theta_x^{p'} = d\theta_x^p/dx$, ενώ η δευτερογενής συστροφή $\theta_x^{s'} = d\theta_x^s/dx$ λαμβάνεται έμμεσα υπόψη χρησιμοποιώντας κατάλληλο διορθωτικό συντελεστή διάτμησης. Η επιλογή αυτή προσφέρει πλεονεκτήματα στην εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών. Στην περίπτωση αγνόησης των διατμητικών παραμορφώσεων λόγω δευτερογενούς στρεπτικής ροπής η $d\theta_x^s/dx=0$ ενώ η $d\theta_x^p/dx=d\theta_x/dx$. Η παραδοχή αυτή συνήθως ικανοποιείται στην περίπτωση ραβδωτών στοιχείων με διατομή ανοικτού σχήματος. Έτσι, το 14x1 διάνυσμα επικόμβιων μετατοπίσεων του στοιχείου στο τοπικό σύστημα αξόνων, όπως φαίνεται και στο Σχ.1α, μπορεί να γραφεί ως

$$\{D^i\}^T = \{u_{xj} \quad u_{yj} \quad u_{zj} \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj} \quad \theta_{zj} \quad \theta_{xj}^{p'} \quad u_{xk} \quad u_{yk} \quad u_{zk} \quad \theta_{xk} \quad \theta_{yk} \quad \theta_{zk} \quad \theta_{xk}^{p'}\} \quad (1)$$

και το αντίστοιχο 14x1 διάνυσμα επικόμβιων δράσεων (δράσεις παγίωσης) ως

$$\{F^i\}^T = \{N_j \quad Q_{yj} \quad Q_{zj} \quad M_{xj} \quad M_{yj} \quad M_{zj} \quad M_{w_{vj}} \quad N_k \quad Q_{yk} \quad Q_{zk} \quad M_{xk} \quad M_{yk} \quad M_{zk} \quad M_{w_{vk}}\} \quad (2)$$

τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με το 14x14 τοπικό μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου $[K^i]$ (παρουσιαζόμενο μητρώο), που γράφεται ως

$$[K^i] = \begin{bmatrix} k_{11}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{18}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}^i & 0 & 0 & 0 & k_{26}^i & 0 & 0 & k_{29}^i & 0 & 0 & 0 & k_{2,13}^i & 0 \\ 0 & 0 & k_{33}^i & 0 & k_{35}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{3,10}^i & 0 & k_{3,12}^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{k_{T1}^i} & 0 & 0 & \boxed{k_{T2}^i} & 0 & 0 & 0 & \boxed{-k_{T1}^i} & 0 & 0 & \boxed{k_{T5}^i} \\ 0 & 0 & k_{53}^i & 0 & k_{55}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{5,10}^i & 0 & k_{5,12}^i & 0 & 0 \\ 0 & k_{62}^i & 0 & 0 & 0 & k_{66}^i & 0 & 0 & k_{69}^i & 0 & 0 & 0 & k_{6,13}^i & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \boxed{k_{T2}^i} & 0 & 0 & \boxed{k_{T3}^i} & 0 & 0 & 0 & \boxed{-k_{T2}^i} & 0 & 0 & \boxed{k_{T4}^i} \\ \hline k_{81}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{88}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{92}^i & 0 & 0 & 0 & k_{96}^i & 0 & 0 & k_{99}^i & 0 & 0 & 0 & k_{9,13}^i & 0 \\ 0 & 0 & k_{10,3}^i & 0 & k_{10,5}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{10,10}^i & 0 & k_{10,12}^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-k_{T1}^i} & 0 & 0 & \boxed{-k_{T2}^i} & 0 & 0 & 0 & \boxed{k_{T5}^i} & 0 & 0 & \boxed{-k_{T5}^i} \\ 0 & 0 & k_{12,3}^i & 0 & k_{12,5}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{12,10}^i & 0 & k_{12,12}^i & 0 & 0 \\ 0 & k_{13,2}^i & 0 & 0 & 0 & k_{13,6}^i & 0 & 0 & k_{13,9}^i & 0 & 0 & 0 & k_{13,13}^i & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \boxed{k_{T5}^i} & 0 & 0 & \boxed{k_{T4}^i} & 0 & 0 & 0 & \boxed{-k_{T5}^i} & 0 & 0 & \boxed{k_{T6}^i} \end{bmatrix} \quad (3)$$

όπου οι συντελεστές στιβαρότητας k_{Tn}^i ($n=1,2,3,4,5,6$) περιλαμβάνουν την επιρροή της στρεπτικής στρέβλωσης συμπεριλαμβανομένων των διατμητικών παραμορφώσεων λόγω δευτερογενούς στρεπτικής ροπής, ενώ οι συντελεστές k_{lm}^i ($=k_{ml}^i$) ($l,m=2,3,5,6,9,10,12,13$)

περιλαμβάνουν την επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων λόγω τέμνουσας δύναμης σύμφωνα με τη θεωρία δοκού Timoshenko και τέλος, οι συντελεστές $k_{pq}^i (= k_{qp}^i)$ προκύπτουν από την αξονική παραμόρφωση της δοκού. Ο προσδιορισμός των συντελεστών του 14x14 μητρώου στιβαρότητας της εξ.(3) και του διανύσματος επικόμβιων δράσεων της εξ.(3) απαιτεί την επίλυση οκτώ προβλημάτων συνοριακών τιμών αναφορικά με τη συνολική γωνία στρέψης (συνισταμένη της πρωτογενούς και δευτερογενούς γωνίας στρέψης), την πρωτογενή και δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης, τις βυθίσεις, τη διαμήκη μετατόπιση και δυο τασικές συναρτήσεις. Τα προβλήματα αυτά παρουσιάζονται διεξοδικά στην εργασία των Sapountzakis and Mokos [1], με εξαίρεση το πρόβλημα συνοριακών τιμών αναφορικά με τη συνολική γωνία στρέψης το οποίο παρουσιάζεται στη συνέχεια.

3.1 Διευρυμένη Θεωρία Ανομοιόμορφης Στρέψης Ράβδων

Έστω ράβδος υποβαλλόμενη σε τυχούσα κατανεμημένη στρεπτική ροπή $m_t = m_t(x)$. Η συνολική γωνία στρέψης της ράβδου θ_x (συνισταμένη της πρωτογενούς θ_x^p και δευτερογενούς θ_x^s γωνίας στρέψης) λαμβάνοντας υπόψη διατμητικές παραμορφώσεις λόγω δευτερογενούς στρεπτικής ροπής περιγράφεται από το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών [2]

$$\frac{EC_M}{\kappa} \frac{d^4 \theta_x}{dx^4} - GI_t^p \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} = m_t - \frac{EC_M}{GI_t^p} \frac{d^2 m_t}{dx^2} \frac{(1-\kappa)}{\kappa} \quad \text{στο εσωτερικό της ράβδου} \quad (4)$$

$$c_{x1} \theta_x + c_{x2} M_t = c_{x3} \quad (5a)$$

$$d_{x1} \frac{d\theta_x^p}{dx} + d_{x2} M_w = d_{x3} \quad \text{στα άκρα της ράβδου} \quad (5b)$$

όπου c_{xi}, d_{xi} ($i=1,2,3$) είναι συναρτήσεις που ορίζονται ανάλογα με τις συνοριακές συνθήκες της ράβδου και κ είναι βοηθητική γεωμετρική σταθερά που δίδεται ως

$$\kappa = \frac{I_t^s}{I_t^p + I_t^s} \quad (6)$$

ενώ C_M, I_t^p, I_t^s είναι η σταθερά στρέβλωσης και η πρωτογενής και δευτερογενής στρεπτική σταθερά, αντίστοιχα. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι, η σταθερά κ είναι πάντα μικρότερη ή ίση της μονάδας. Μικρές τιμές της σταθεράς κ υποδεικνύουν ότι οι διατμητικές παραμορφώσεις λόγω δευτερογενούς στρεπτικής ροπής είναι σημαντικές (π.χ. σε κλειστές διατομές), ενώ στην περίπτωση που αγνοούνται οι προαναφερθείσες παραμορφώσεις η σταθερά κ λαμβάνεται μοναδιαία. Οι σταθερές C_M, I_t^p, I_t^s δίδονται ως

$$C_M = \int_{\Omega} \varphi_M^p{}^2 d\Omega \quad (7)$$

$$I_t^p = \int_{\Omega} \left(y^2 + z^2 + y \frac{\partial \varphi_M^p}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi_M^p}{\partial y} \right) d\Omega \quad (8)$$

$$I_t^s = - \frac{C_M}{\int_{\Omega} \varphi_M^p \tilde{\varphi}_M^s d\Omega} \quad (9)$$

όπου η πρωτογενής φ_M^p και δευτερογενής $\tilde{\varphi}_M^s$ συνάρτηση στρέβλωσης προσδιορίζεται από την επίλυση των ακόλουθων προβλημάτων συνοριακών τιμών τύπου Neumann αντίστοιχα

$$\nabla^2 \varphi_M^p = 0 \quad \text{στο εσωτερικό } \Omega \text{ της διατομής} \quad (10\alpha)$$

$$\frac{\partial \varphi_M^p}{\partial n} = zn_y - yn_z \quad \text{στο σύνορο } \Gamma \text{ της διατομής} \quad (10\beta)$$

$$\nabla^2 \tilde{\varphi}_M^s = \frac{\varphi_M^p}{C_M} \quad \text{στο εσωτερικό } \Omega \text{ της διατομής} \quad (11\alpha)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_M^s}{\partial n} = 0 \quad \text{στο σύνορο } \Gamma \text{ της διατομής} \quad (11\beta)$$

Τέλος, η διρροπή M_w , η συνολική στρεπτική ροπή M_t και η πρωτογενής συστροφή ορίζονται ως

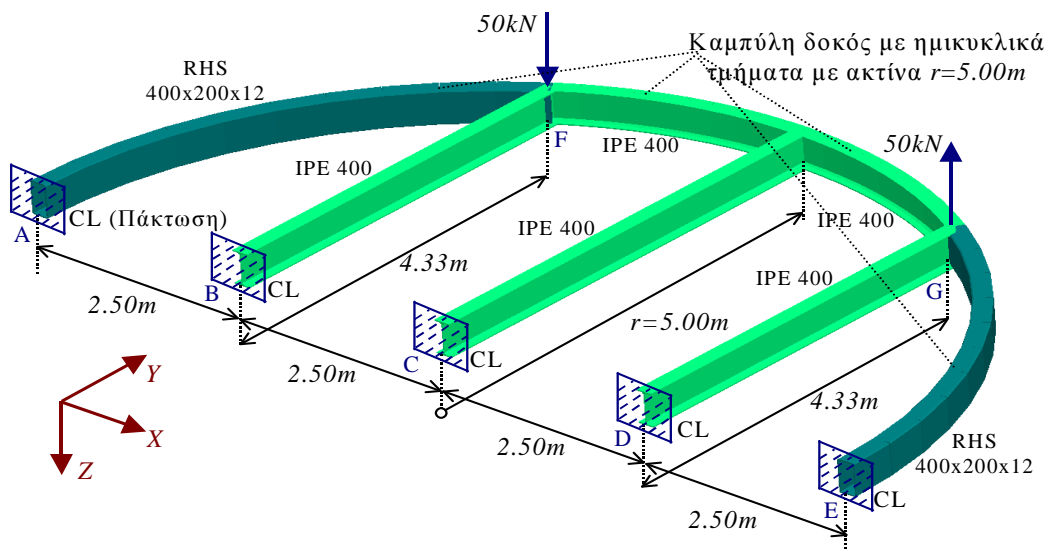
$$M_w = -\frac{EC_M}{\kappa} \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} - \frac{EC_M}{GI_t^p} m_t \frac{(1-\kappa)}{\kappa} \quad (12)$$

$$M_t = M_t^p + M_t^s = \left(GI_t^p \frac{d\theta_x}{dx} \right) + \left(-\frac{EC_M}{\kappa} \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} - \frac{EC_M}{GI_t^p} \frac{dm_t}{dx} \frac{(1-\kappa)}{\kappa} \right) \quad (13)$$

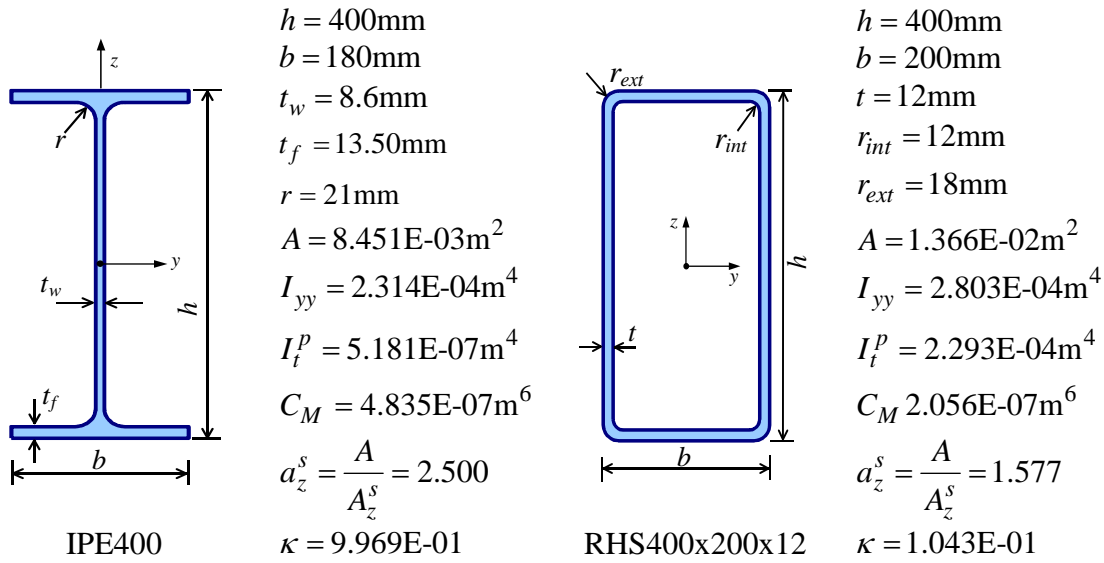
$$\frac{d\theta_x^p}{dx} = \frac{d\theta_x}{dx} + \frac{1-\kappa}{GI_t^p \kappa} \left(\frac{EC_M}{\kappa} \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} + \frac{EC_M}{GI_t^p} \frac{dm_t}{dx} \frac{(1-\kappa)}{\kappa} \right) \quad (14)$$

4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Η αριθμητική επίλυση όλων των προαναφερθέντων προβλημάτων συνοριακών τιμών επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων (BEM), όπως αυτή παρουσιάζεται διεξοδικά στις εργασίες των Sarountzakis and Mokos [1,2]. Προκειμένου να διαπιστωθεί η αποτελεσματικότητα και το εύρος εφαρμογής της προτεινόμενης μεθόδου ως παράδειγμα μελετήθηκε καμπύλος μεταλλικός φορέας αποτελούμενος από πρότυπες διατομές IPE400 και RHS400x200x12 και υποβαλλόμενος σε συγκεντρωμένα φορτία όπως φαίνεται στο Σχ.2. Τα απαιτούμενα για την ανάλυση γεωμετρικά χαρακτηριστικά των πρότυπων μεταλλικών διατομών IPE400 και RHS400x200x12 δίδονται στο Σχ.3.



Σχ.2. Καμπύλος μεταλλικός φορέας αποτελούμενος από πρότυπες διατομές IPE400 και RHS400x200x12, υποβαλλόμενος σε συγκεντρωμένα φορτία.



(I_{yy} : Καμπτική Ροπή Αδράνειας περί yy , A_z^s : Επιφάνεια Διατομής κατά zz)
 Σχ.3. Γεωμετρικά χαρακτηριστικά πρότυπων διατομών IPE400 και RHS400x200x12.

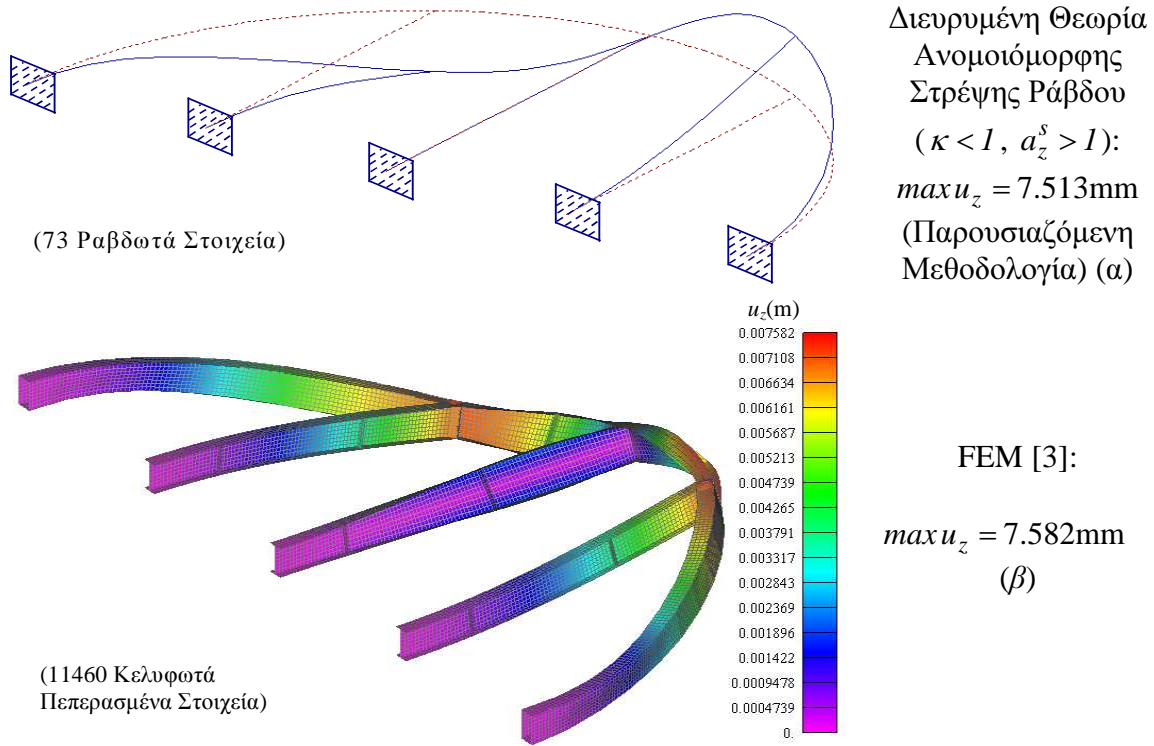
Στον Πιν.1 παρουσιάζονται οι μέγιστες βυθίσεις της μεταλλικής ραβδωτής κατασκευής για διάφορες θεωρίες δοκού και συγκρίνονται με τη βύθιση που προκύπτει χρησιμοποιώντας 11460 κελυφωτά πεπερασμένα στοιχεία με τη βοήθεια του λογισμικού NASTRAN [3].

Θεωρία Ομοιόμορφης Στρέψης Ράβδου (Στρέψη Saint–Venant)		FEM [3] (Κελυφωτά Π.Σ.)
Χωρίς Διατμητικές Παραμορφώσεις λόγω Τέμνουσας Δύναμης (Θεωρία Δοκού Bernoulli–Euler, $a_z^s = 0$)	13.840	7.582
Με Διατμητικές Παραμορφώσεις λόγω Τέμνουσας Δύναμης (Θεωρία Δοκού Timoshenko, $a_z^s > 1$)	14.124	
Κλασσική Θεωρία Ανομοιόμορφης Στρέψης Ράβδου ($\kappa = 1$)		
Χωρίς Διατμητικές Παραμορφώσεις λόγω Τέμνουσας Δύναμης	7.061	
Με Διατμητικές Παραμορφώσεις λόγω Τέμνουσας Δύναμης	7.227	
Διευρυμένη Θεωρία Ανομοιόμορφης Στρέψης Ράβδου ($\kappa < 1$)		
Χωρίς Διατμητικές Παραμορφώσεις λόγω Τέμνουσας Δύναμης	7.363	
Με Διατμητικές Παραμορφώσεις λόγω Τέμνουσας Δύναμης (Παρουσιαζόμενη Μεθοδολογία)	7.513	

Πίν.1. Μέγιστες βυθίσεις $\max u_z$ (mm) του εξεταζόμενου μεταλλικού φορέα.

Επιπροσθέτως, στο Σχ.4 απεικονίζονται οι ελαστικές επιφάνειες και οι αντίστοιχες μέγιστες τιμές του ραβδωτού φορέα αναφορικά με τη παρουσιαζόμενη διευρυμένη θεωρία δοκού και τη θεωρία κελυφών χρησιμοποιώντας πεπερασμένα στοιχεία. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι, η ασυμφωνία στις βυθίσεις ανάμεσα στη θεωρία δοκού Bernoulli–Euler και στην παρουσιαζόμενη διευρυμένη θεωρία δοκού ανομοιόμορφης στρέψης είναι της τάξεως του 84%, ενώ η αντίστοιχη απόκλιση ανάμεσα στην παρουσιαζόμενη διευρυμένη θεωρία δοκού και στη θεωρία κελυφών είναι μικρότερη του 1%. Από τον Πιν.1 και το Σχ.4

επιβεβαιώνεται η αξιοπιστία της προτεινόμενης μεθόδου, ενώ διαπιστώνεται η αναγκαιότητα συνυπολογισμού τόσο της στρεπτικής καμπυλότητας (προσθετός βαθμός ελευθερίας) όσο και των διατμητικών παραμορφώσεων λόγω τέμνουσας δύναμης και δευτερογενούς στρεπτικής ροπής.



Σχ.4. Ελαστικές επιφάνειες εξεταζόμενου μεταλλικού φορέα.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

- Η προτεινόμενη μέθοδος προσφέρεται για τον ακριβή υπολογισμό όλων των γεωμετρικών στρεπτικών και διατμητικών μεγεθών, καθώς και όλων των αναπτυσσόμενων ορθών και διατμητικών τάσεων.
- Η στρεπτική στρέβλωση σε συνδυασμό με τις διατμητικές παραμορφώσεις, τόσο λόγω τέμνουσας δύναμης όσο και λόγω δευτερογενούς στρεπτικής ροπής, επηρεάζουν υπό προϋποθέσεις σημαντικά την παραμορφωσιακή ή/και εντατική κατάσταση μεταλλικών ραβδωτών φορέων και επομένως κρίνεται απαραίτητο να συνυπολογίζονται στην ανάλυση μεταλλικών κατασκευών.

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Sapountzakis E.J. and Mokos V.G. (2007), “3-D Beam Element of Composite Cross Section Including Warping and Shear Deformation Effects”, *Computers and Structures*, Vol.85, pp.102-116.
- [2] Sapountzakis, E.J. and Mokos, V.G. (2009). “Secondary torsional moment deformation effect by BEM”. *Proc. of the 10th International Conference on Boundary Element Techniques – BETEQ 2009*, Athens, Greece, 22-24 July, 81-88.
- [3] NX NASTRAN for FEMAP V10, “Finite Element Modelling”, USA, 2008.

3-D BEAM ELEMENT INCLUDING TORSIONAL WARPING AND SHEAR DEFORMATION EFFECTS DUE TO SHEAR FORCES AND SECONDARY TORSIONAL MOMENTS - APPLICATIONS TO STEEL STRUCTURES

Vasileios G. Mokos

Dr. Civil Engineer

School of Civil Engineering, National Technical University of Athens

Zografou Campus, GR-157 80, Athens, Greece

e-mail: vgmokos@central.ntua.gr

Evangelos J. Sapountzakis

Associate Professor

School of Civil Engineering, National Technical University of Athens

Zografou Campus, GR-157 80, Athens, Greece

e-mail: cvsapoun@central.ntua.gr

SUMMARY

In engineering practice accurate analysis of steel beam structures is difficult to be achieved since commercial programs in general consider six degrees of freedom at each end node of a member of a space frame, ignoring in this way the torsional warping effects due to the corresponding restraint at the ends of the member. In this paper a Boundary Element Method (BEM) is developed for the construction of a new extended 14x14 stiffness matrix and the corresponding nodal load vector of a member of arbitrary doubly symmetric constant cross section taking into account both torsional warping and shear deformation effects arising from shear forces and secondary torsional moment. Eight boundary value problems with respect to the variable along the beam total angle of twist, to the primary and secondary torsional warping functions, to the beam transverse and longitudinal displacements and to two stress functions are formulated and solved employing a BEM approach. Representative examples have been studied to demonstrate the efficiency and the range of applications of the developed method. The discrepancy of both the deflections and/or the internal forces of a member of a spatial steel structure arising from the ignorance of the shear deformation effect due to secondary torsional moment necessitates the inclusion of this additional effect especially in closed form cross section steel members.