

ΕΠΙΡΡΟΗ ΔΕΥΤΕΡΟΓΕΝΩΝ ΣΤΡΕΠΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΑΒΔΩΝ ΤΥΧΟΥΣΑΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

Ε.Ι. Σαπουντζάκης

Αναπληρωτής Καθηγητής
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, Αθήνα 15780, Ελλάδα
e-mail: cvsapoun@central.ntua.gr

Β.Ι. Τσίπρας

Υποψήφιος Διδάκτωρ
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, Αθήνα 15780, Ελλάδα
e-mail: tsipiras@gmail.com

Β.Γ. Μώκος

Δρ. Πολιτικός Μηχανικός
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, Αθήνα 15780, Ελλάδα
e-mail: vgmokos@central.ntua.gr

1. ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία διερευνάται η επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων στην ανάλυση μεταλλικών ράβδων τυχούσας διπλά συμμετρικής διατομής. Αρχικά διατυπώνεται η διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων και προσδιορίζονται οι στρεπτικοί διορθωτικοί συντελεστές διάτμησης για πλήθος πρότυπων μεταλλικών διατομών ανοικτού ή κλειστού σχήματος. Η μεθοδολογία προσδιορισμού βασίζεται σε ενεργειακή θεώρηση ενώ ο αριθμητικός υπολογισμός πραγματοποιείται με τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων (BEM). Η αναπτυσσόμενη τεχνική δεν βασίζεται στις παραδοχές της Θεωρίας Λεπτότοιχων διατομών (ΘΛΔ), επομένως μπορούν να αναλυθούν διατομές τυχόντος σχήματος. Προσδιορίζονται τα όρια αξιόπιστης χρήσης της ΘΛΔ για τον προσδιορισμό των στρεπτικών γεωμετρικών σταθερών. Επιπλέον, επιλύονται παραδείγματα ιδιαίτερου πρακτικού ενδιαφέροντος μέσα από τα οποία καταδεικνύεται η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων σε ράβδους ανοικτών και κλειστών διατομών. Τέλος, ποσοτικοποιούνται οι συνέπειες της αγνόησης των φαινομένων στρέβλωσης σε κοίλες λεπτότοιχες διατομές που επιτρέπει απλοποιητικά ο EC3 - μέρος 1.1.

2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε κατασκευές Πολιτικού Μηχανικού συναντάται συχνά η ανάλυση μεταλλικών ραβδωτών μελών φορέα υποβαλλόμενων σε στρεπτική φόρτιση. Έτσι, καμπύλες γέφυρες,

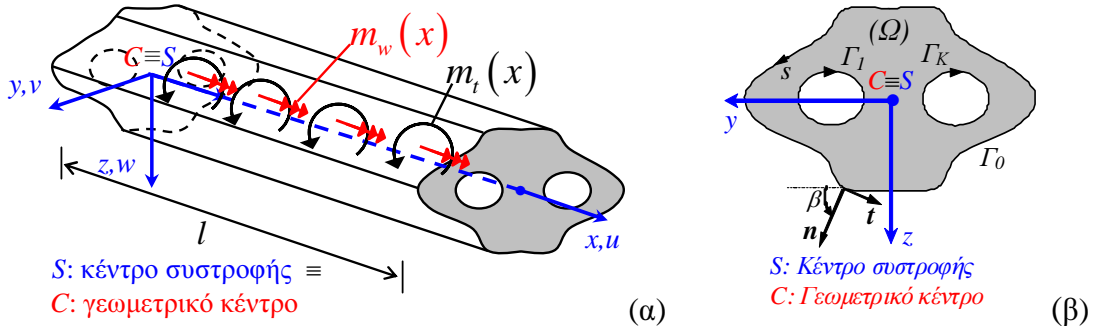
δοκοί υποβαλλόμενες σε έκκεντρη φόρτιση, υποστυλώματα τοποθετημένα έκκεντρα σε κάτοψη είναι οι πλέον συχνά συναντώμενες περιπτώσεις, στις οποίες απαιτείται η επίλυση του προβλήματος στρέψης. Στην ομοιόμορφη στρέψη, που προκύπτει από την επιβολή δύο ισόποσων στρεπτικών ροπών στα άκρα της ράβδου με την ταυτόχρονη απαίτηση να μην παρεμποδίζεται η αναπτυσσόμενη στρέβλωση των διατομών, αναπτύσσονται αποκλειστικά πρωτογενείς διατμητικές τάσεις (πρωτογενής στρεπτική ροπή), ενώ η στρέβλωση είναι σταθερή κατά μήκος της ράβδου. Σε περίπτωση τυχούσας φόρτισης ή συντοριακών συνθηκών, η στρέψη χαρακτηρίζεται ως ανομοιόμορφη, στη ράβδο αναπτύσσονται επιπλέον τόσο ορθές όσο και δευτερογενείς διατμητικές τάσεις λόγω στρέβλωσης (δίρροπο στρέβλωσης και δευτερογενής στρεπτική ροπή), ενώ η στρέβλωση μεταβάλλεται κατά μήκος της ράβδου. Στην «κλασική» θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης [1], η στρέβλωση λαμβάνεται ως ανάλογη της συστροφής θ'_x , με συνέπεια η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων να αγνοείται στην καθολική ισορροπία της ράβδου. Η επιρροή αυτή μπορεί να ληφθεί υπόψιν με υιοθέτηση πρόσθετου ανεξάρτητου κινηματικού μεγέθους που δίδει το μέγεθος της στρέβλωσης της διατομής (πρωτογενής συστροφή ή ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης η_x) [2-5]. Η προκύπτουσα «διευρυμένη» θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης παρουσιάζει πλήρη αναλογία με τη μη γραμμική θεωρία 2ης τάξης καμπτόμενων ράβδων Timoshenko [4]. Συνεπώς, προκύπτει κατ' αναλογία η ανάγκη διόρθωσης της δευτερογενούς στρεπτικής αντίστασης με χρήση κατάλληλου διορθωτικού συντελεστή διάτμησης [5-6].

Ο EC3 - μέρος 1.1 (παρ. (6.2.7(7)) επιτρέπει απλοποιητικά την αγνόηση των επιρροών της στρέβλωσης σε κοίλοδοκούς, οι οποίες εξάλλου προσομοιώνονται βάσει της θεωρίας ομοιόμορφης στρέψης κατά την τρέχουσα μελετητική πρακτική. Πρόσφατα ερευνητικά αποτελέσματα [3-5] ωστόσο, υποδεικνύουν την ανάγκη θεώρησης των φαινομένων στρέβλωσης όχι μόνο σε ανοικτές αλλά και σε κλειστές λεπτότοιχες διατομές. Εξάλλου και ο EC9 - μέρος 1.1 δεν περιέχει την προαναφερθείσα απλοποιητική θεώρηση. Επιπρόσθετα, τονίζεται ότι τα φαινόμενα δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων (που αγνοούνται στα πλαίσια της κλασικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης) πρέπει να λαμβάνονται υπόψιν στην ανάλυση ράβδων κλειστής διατομής [3-5]. Ο προσδιορισμός της δευτερογενούς στρεπτικής αντίστασης και των υπόλοιπων γεωμετρικών σταθερών που υπεισέρχονται στη διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης πραγματοποιείται στην ερευνητική βιβλιογραφία [3-5, 7] κυρίως με τη ΘΛΔ, η αξιοπιστία της οποίας εξαρτάται κυρίως από το λόγο μήκος/πάχος των πλακοειδών στοιχείων της διατομής. Εξ' όσων γνωρίζουν οι συγγραφείς, οι γεωμετρικές σταθερές προσδιορίζονται μέσω της διατύπωσης κατάλληλων προβλημάτων συντοριακών τιμών (ΠΣΤ) και επίλυσης τους με αριθμητικές μεθόδους μόνο στις εργασίες των Kraus [6] (FEM) και Sapountzakis & Mokos [5] (BEM). Στην παρούσα εργασία διερευνάται η επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων στην ανάλυση μεταλλικών ράβδων τυχούσας διπλά συμμετρικής διατομής. Προσδιορίζονται οι στρεπτικοί διορθωτικοί συντελεστές διάτμησης για πλήθος πρότυπων μεταλλικών ανοικτών και κλειστών διατομών. Στα παραδείγματα που επιλύονται καταδεικνύεται η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων σε ράβδους ανοικτών και κλειστών διατομών, ενώ ποσοτικοποιούνται οι συνέπειες της αγνόησης των φαινομένων στρέβλωσης σε κοίλες διατομές που επιτρέπει απλοποιητικά ο EC3-μέρος 1.1.

3. ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε ευθύγραμμη, πρισματική, ομογενή ράβδο, τυχούσας διπλά συμμετρικής διατομής που καταλαμβάνει το χωρίο Ω απλής ή πολλαπλής συνοχής του επιπέδου y, z

και περικλείεται από τις $K+1$ τμηματικώς λείες καμπύλες Γ_i ($i=0,1,\dots,K$) (Σχ. 1). Το υλικό της ράβδου είναι ελαστικό με μέτρα ελαστικότητας και διάτμησης E και G , αντίστοιχα, ενώ υποβάλλεται σε τυχούσες συγκεντρωμένες ή/και κατανεμημένες στρεπτικές ροπές $m_t = m_t(x)$ και δίρροπα στρέβλωσης $m_w = m_w(x)$ περί τον διαμήκη άξονα της (Σχ. 1α).



Σχ. 1: Πρισματική ράβδος υποβαλλόμενη σε τυχούσα στρεπτική φόρτιση (α) τυχούσας διπλά συμμετρικής διατομής που καταλαμβάνει το διάστημα χωρίου Ω (β)

Δεδομένης της προαναφερθείσας φόρτισης, διατυπώνεται η υπόθεση ότι το πεδίο μετατοπίσεων της ράβδου δίδεται, ως (βλ. Σχ. 1α)

$$u(x, y, z) = \eta_x(x) \phi_S^P(y, z) \quad v(x, y, z) = -z\theta_x(x) \quad w(x, y, z) = y\theta_x(x) \quad (1,2,3)$$

όπου θ_x είναι η στρεπτική γωνία στροφής, η_x είναι ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης και ϕ_S^P είναι η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης ως προς το σημείο S [8]. Στην περίπτωση διατύπωσης της «κλασικής» θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης τίθεται $\eta_x = \theta'_x$ στη σχ. (1). Κάνοντας χρήση των σχέσεων παραμορφώσεων-μετατοπίσεων και των καταστατικών σχέσεων της τρισδιάστατης ελαστικότητας (θεωρία μικρών μετατοπίσεων), προκύπτουν οι τάσεις που καταπονούν τη ράβδο ως

$$\sigma_{xx} = E\eta'_x \phi_S^P \quad (4\alpha)$$

$$\tau_{xy} = \underbrace{G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\tau_{xy}^P: \text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G(\eta_x - \theta'_x) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y}}_{\tau_{xy}^S: \text{δευτερογενείς}} \quad \tau_{xz} = \underbrace{G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\tau_{xz}^P: \text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G(\eta_x - \theta'_x) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z}}_{\tau_{xz}^S: \text{δευτερογενείς}} \quad (4\beta, \gamma)$$

Σε περίπτωση αγνόησης των φαινομένων στρέβλωσης (θεωρία ομοιόμορφης στρέψης), οι συνιστώσες τάσεων σ_{xx} , τ_{xy}^S , τ_{xz}^S αγνοούνται. Τα εντατικά μεγέθη της ράβδου (πρωτογενής στρεπτική ροπή M_t^P , δευτερογενής στρεπτική ροπή M_t^S και δίρροπο στρέβλωσης M_w) ορίζονται ανάλογα με αυτά της κλασικής θεωρίας ανομ. στρέψης ως

$$M_t^P = \int_{\Omega} \left[\tau_{xy}^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \tau_{xz}^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega = GI_t^P \theta'_x \quad (6\alpha)$$

$$M_t^S = - \int_{\Omega} \left(\tau_{xy}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} + \tau_{xz}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega = -GI_t^S (\eta_x - \theta'_x) \quad M_w = - \int_{\Omega} \sigma_{xx} \phi_S^P d\Omega = -EC_S \eta'_x \quad (6\beta, \gamma)$$

όπου I_t^S (δευτερογενής στρεπτική σταθερά) και C_S (σταθερά στρέβλωσης) δίδονται ως

$$I_t^S = k_x \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad C_S = \int_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega \quad (7\alpha, \beta)$$

ενώ σημειώνεται ότι I_t^P είναι η πρωτογενής στρεπτική σταθερά [8] και ότι η συνολική στρεπτική ροπή προκύπτει ως άθροισμα των M_t^P , M_t^S .

Κατ' αναλογία με τη θεωρία καμπτόμενων ράβδων Timoshenko, στη δευτερογενή στρεπτική σταθερά εισάγεται ο στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής k_x προκειμένου να διορθωθεί σε επίπεδο καθολικής ισορροπίας της ράβδου το σφάλμα από την κατανομή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων των σχ. (4β,γ), η οποία οδηγεί σε παραβίαση της ισορροπίας κατά μήκος της ράβδου σε επίπεδο υλικού σημείου. Για τον ίδιο λόγο, η κατανομή των διατμητικών τάσεων των σχ. (4β,γ) διορθώνεται ως

$$\tau_{xy} = \underbrace{G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} - \underbrace{G(\eta_x - \theta'_x) \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad \tau_{xz} = \underbrace{G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} - \underbrace{G(\eta_x - \theta'_x) \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (8\alpha, \beta)$$

προκειμένου να ικανοποιηθεί η προαναφερθείσα εξίσωση ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου καθώς και η αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη. Στις παραπάνω εξισώσεις, $\phi_S^S = \phi_S^S(y, z)$ είναι η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης ως προς το S η οποία προσδιορίζεται, όπως και η ϕ_S^P , μέσω ΠΣΤ [5, 8]. Επιπλέον, στην παρούσα εργασία, ο προσδιορισμός του k_x βασίζεται σε ενεργειακή θεώρηση (εξίσωση προσεγγιστικής και ακριβούς έκφρασης ελαστικής ενέργειας λόγω διάτμησης ανά μονάδα μήκους της ράβδου) και υπολογίζεται συναρτήσει των ϕ_S^P , ϕ_S^S ($k_x < 1$) [5]. Οι εξισώσεις καθολικής ισορροπίας της ράβδου μπορούν να προκύψουν χρησιμοποιώντας την Αρχή Δυνατών Έργων και έπειτα από κάποια άλγεβρα διατυπώνονται ως

$$-G(I_t^P + I_t^S)\theta''_x + GI_t^S\eta'_x = m_t \quad -EC_S\eta''_x + GI_t^S(\eta_x - \theta'_x) = -m_w \quad (9\alpha, \beta)$$

ενώ υπόκεινται στις πλέον γενικές στρεπτικές και στρεβλωτικές συνοριακές συνθήκες

$$\alpha_1 M_t + \alpha_2 \theta_x = \alpha_3 \quad \beta_1 M_w + \beta_2 \eta_x = \beta_3 \quad (10\alpha, \beta)$$

όπου οι σταθερές α_i, β_i ($i=1,2,3$) καθορίζονται κατάλληλα προκειμένου να προσομοιωθούν ορθά οι συνθήκες στήριξης και φόρτισης στα άκρα της ράβδου.

4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Η αριθμητική επίλυση του ΠΣΤ των σχ. (9-10), των ΠΣΤ των ϕ_S^P , ϕ_S^S , και η εύρεση των γεωμετρικών σταθερών και του k_x πραγματοποιούνται με τη BEM (βλ. [5, 8]).

Προκειμένου να διαπιστωθεί η ακρίβεια της αναπτυχθείσας μεθόδου και να προσδιοριστεί το σφάλμα της ΘΛΔ σε διατομές ανοικτού σχήματος, στον πίνακα 1 παρουσιάζονται οι γεωμετρικές σταθερές I_t^S , C_S για πλήθος πρότυπων ανοικτών λεπτότοιχων διατομών. Παρατηρείται πολύ καλή συμφωνία των αποτελεσμάτων της παρούσας μεθόδου με τις τιμές που προκύπτουν από την επίλυση των σχετικών ΠΣΤ με Πεπερασμένα Στοιχεία (ΠΣ) [6]. Επίσης, προκύπτει ότι το σφάλμα της ΘΛΔ [3] είναι σε όλες τις περιπτώσεις μικρότερο από 9%, ενώ παρατηρείται ότι το σφάλμα της σταθεράς C_S εξαρτάται από το πάχος των πλακοειδών στοιχείων της διατομής. Προκειμένου να προσδιοριστεί το σφάλμα

της ΘΛΔ σε διατομές κλειστού σχήματος, στον ίδιο πίνακα συγκρίνονται οι τιμές των I_t^S , C_S για διατομές ορθογωνικής μορφής (RHS, βλ. EN10210-2:2006) που προκύπτουν από την παρούσα μεθοδολογία και τη ΘΛΔ [7]. Παρατηρείται ότι το σφάλμα της ΘΛΔ για τον υπολογισμό των I_t^S , C_S εξαρτάται από το πάχος των πλακοειδών στοιχείων της διατομής, ενώ σε ορισμένες περιπτώσεις προσεγγίζει το 20%. Τέλος, προκειμένου να καταδειχθεί το εύρος εφαρμογών της μεθόδου, στον ίδιο πίνακα παρουσιάζονται και οι τιμές των σταθερών I_t^S , C_S για πρότυπες οβάλ διατομές (EHS, βλ. EN10210-2:2006), έτσι όπως προκύπτουν με εφαρμογή της παρούσας μεθόδου. Στον ίδιο πίνακα αναφέρονται και οι τιμές της C_S που προκύπτουν από την χρήση του εμπορικού λογισμικού ΠΣ. Συμπεραίνεται η πολύ καλή συμφωνία μεταξύ των τιμών αυτών και των τιμών της παρούσας μεθόδου τόσο για τις RHS όσο και για τις EHS διατομές.

Προκειμένου να διερευνηθεί η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων σε ράβδους ανοικτής διατομής, αναλύονται μεταλλικοί ράβδοι διαφόρων μηκών, διατομής HEB100 ($E = 2.1 \times 10^8 \text{ kPa}$, $G = 8.0769 \times 10^7 \text{ kPa}$, $I_t^P = 9.309 \times 10^{-8} \text{ m}^4$, αριστερό άκρο πακτωμένο, στρεπτική ροπή $M_t = 10 \text{ kNm}$ και μη παρεμπόδιση στρέβλωσης στο δεξί άκρο). Στον πίνακα 2 παρουσιάζονται οι μέγιστες τιμές χαρακτηριστικών κινηματικών και εντατικών μεγεθών που υπολογίζονται με βάση την κλασική [8] και τη διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης. Όπως αναμενόταν, οι δευτερογενείς στρεπτικές παραμορφώσεις προκαλούν μείωση της στιβαρότητας της ράβδου, με τη διαφορά των κινηματικών μεγεθών μεταξύ των δύο θεωριών να είναι σημαντική ωστόσο μόνο για πολύ κοντές ράβδους (με λόγους $b/tf = h/tw \leq 2$). Παρατηρείται επίσης ότι η διαφορά των εντατικών μεγεθών μεταξύ των δύο θεωριών δεν ξεπερνά το 2.6% για όλα τα μήκη που εξετάστηκαν. Παρόμοια συμπεράσματα έχουν διατυπωθεί για ράβδους ανοικτής διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη και στην πρόσφατη ερευνητική βιβλιογραφία [3-5]. Προκειμένου να διερευνηθεί η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων σε ράβδους κλειστής διατομής, αναλύονται μεταλλικοί ράβδοι ($E = 2.1 \times 10^8 \text{ kPa}$, $G = 8.0769 \times 10^7 \text{ kPa}$) διάφορων μηκών, συντοριακών συνθηκών και φόρτισης, διατομής RHS 160x80x6.3 ($I_t^P = 7.230 \times 10^{-6} \text{ m}^4$, πακτωμένο αριστερό άκρο, στρεπτική ροπή $M_t = 10 \text{ kNm}$ και μη παρεμπόδιση στρέβλωσης στο δεξί άκρο), RHS 450x250x8 ($I_t^P = 2.708 \times 10^{-4} \text{ m}^4$, πακτωμένα άκρα, στρεπτική ροπή $M_t = 10 \text{ kNm}$ στο μέσο της ράβδου) και EHS 400x200x8 ($I_t^P = 1.151 \times 10^{-4} \text{ m}^4$, πακτωμένα άκρα, κατανεμημένη στρεπτική ροπή $m_t = 10 \text{ kNm/m}$ σε όλο το μήκος της ράβδου). Οι υπολογισμοί πραγματοποιούνται με βάση τη θεωρία ομοιόμορφης στρέψης, η οποία επιτρέπεται να εφαρμόζεται σε κοιλοδοκούς (βλ. EC3-μέρος 1.1) και με βάση τη διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης, μιας και η επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων είναι σημαντική σε ράβδους κλειστής διατομής [3-5]. Στον πίνακα 2 παρουσιάζονται οι μέγιστες τιμές χαρακτηριστικών κινηματικών και τασικών μεγεθών ράβδων με τις προαναφερθείσες διατομές. Όπως αναμενόταν, η διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης προβλέπει αύξηση της στιβαρότητας της ράβδου συγκριτικά με τη θεωρία ομοιόμορφης στρέψης, η οποία είναι αξιοσημείωτη μόνο σε κοντές ράβδους (με λόγο $l/\max(h,b) \leq 5$). Ωστόσο η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων στα τασικά μεγέθη (Von Mises τάσεις σ_{VM} και πρωτογενείς διατμητικές τάσεις $\tau_{xn}^P = \sqrt{\tau_{xy}^{P2} + \tau_{xz}^{P2}}$) είναι πολύ σημαντικότερη: Παρατηρείται μεγάλη αύξηση (>24%) των

μέγιστων τιμών των τάσεων σ_{VM} σε όλα τα μήκη ράβδων που μελετήθηκαν, συγκριτικά με τα αποτελέσματα της θεωρίας ομοιόμορφης στρέψης, η οποία μάλιστα είναι ανεξάρτητη του μήκους της ράβδου.

Διατομή	$I_t^S (cm^4)$				$C_S (cm^6)$			
	BEM	FEM	ΘΛΔ	σφάλμα ΘΛΔ (%)	BEM	FEM	ΘΛΔ	σφάλμα ΘΛΔ (%)
IPE100 (b/tf=9.6, h/tw=24.4)	126.9	126.9	116.16	8.46	342	342	351	2.70
IPE220 (b/tf=12.0, h/tw=37.3)	2028.3	2027.1	1873.74	7.62	22312	22310	22672	1.62
IPE400 (b/tf=13.3, h/tw=46.5)	16604.5	16589.3	15126.0	8.91	482936	482890	490048	1.47
HEA100 (b/tf=12.5, h/tw=19.2)	276.67	276.65	258.13	6.70	2475	2475	2581	4.29
HEA260 (b/tf=20.8, h/tw=33.3)	8193.2	8189.3	7638.4	6.77	504942	504990	516352	2.26
HEA900 (b/tf=10.0, h/tw=55.6)	295740	295712	277350	6.22	2.47526 $\times 10^7$	2.47480 $\times 10^7$	2.49615 $\times 10^7$	0.84
HEB100 (b/tf=10.0, h/tw=16.7)	357.87	357.82	337.50	5.69	3232	3233	3375	4.42
HEB260 (b/tf=14.9, h/tw=26.0)	11790.8	11797.4	11148.7	5.45	736243	736280	753651	2.36
HEB900 (b/tf=8.6, h/tw=48.6)	347707	347461	327348	5.86	2.92004 $\times 10^7$	2.91960 $\times 10^7$	2.94614 $\times 10^7$	0.89
RHS60x40x5 (b/t=8.0, h/t=12.0)	2.34	-	1.89	19.13	4.03	4.13	3.36	16.60
RHS160x80x6.3 (b/t=12.7, h/t=25.4)	85.74	-	80.7	5.88	1005.85	1021.6	954	5.15
RHS450x250x8 (b/t=31.3, h/t=56.3)	2077.78	-	2019	2.83	228415	229843	225114	1.45
EHS400x200x8 (b/t=25.0, h/t=50.0)	601.18	-	-	-	31371.1	31757.4	-	-
EHS400x200x16 (b/t=12.5, h/t=25.0)	1200.25	-	-	-	58070.5	57698.0	-	-

Πίν. 1. Γεωμετρικές σταθερές I_t^S , C_S ανοικτών και κλειστών διατομών με βάση την παρούσα μέθοδο (BEM), τη ΜΠΣ (FEM - [6] και NASTRAN) και τη ΘΛΔ [3]

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

- i. Το σφάλμα της ΘΛΔ στον υπολογισμό των στρεπτικών γεωμετρικών σταθερών είναι σε ορισμένες περιπτώσεις σημαντικό, ιδίως σε κλειστές διατομές.
- ii. Η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων σε ράβδους ανοικτής διατομής είναι μικρή, ενώ αυξάνεται όσο μικρότερο είναι το μήκος της ράβδου.
- iii. Οι δευτερογενείς στρεπτικές παραμορφώσεις έχουν μικρή επιρροή στη στιβαρότητα και κινηματικά μεγέθη ράβδων κλειστής διατομής. Ωστόσο επηρεάζουν αισθητά εντατικά και τασικά μεγέθη, προκαλώντας αύξηση των μέγιστων τάσεων Von Mises.

		Κλασική θεωρία ανομ.στρέψης[8]			Διευρυμ. θεωρία ανομ. στρέψης		
Μήκος ράβδου (m)		$max M_w$ (kNm^2)	$max M_t^S$ (kNm)	$max \theta_x$ (rad)	$max M_w$ (kNm^2)	$max M_t^S$ (kNm)	$max \theta_x$ (rad)
HEB100	5.0 (l/b=l/h=50.0)	3.005	10.000	6.250	2.966	9.740	6.256
	1.0 (l/b=l/h=10.0)	2.997	10.000	9.314×10^{-1}	2.957	9.743	9.367×10^{-1}
	0.5 (l/b=l/h=5.0)	2.797	10.000	2.931×10^{-1}	2.752	9.743	2.990×10^{-1}
	0.1 (l/b=l/h=1.0)	0.965	10.000	4.703×10^{-3}	0.941	9.743	7.886×10^{-3}
		Θεωρία ομοιόμορφης στρέψης [8]			Διευρυμ. θεωρία ανομ. στρέψης		
Μήκος ράβδου (m)		$max \sigma_{VM}$ (MPa)	$max \tau_{xn}^P$ (MPa)	$max \theta_x$ (rad)	$max \sigma_{VM}$ (MPa)	$max \tau_{xn}^P$ (MPa)	$max \theta_x$ (rad)
RHS 160x80x6.3	10.0 (l/b=125, l/h=62.5)	138.64	8.004	1.696×10^{-1}	178.71	7.162	1.695×10^{-1}
	1.0 (l/b=12.5, l/h=6.25)	138.64	8.004	1.696×10^{-2}	178.71	7.162	1.686×10^{-2}
	0.2 (l/b=2.5, l/h=1.25)	138.64	8.004	3.392×10^{-3}	178.71	7.162	3.288×10^{-3}
RHS 450x250x8	10.0 (l/b=40, l/h=22.2)	5.539	3.198	1.140×10^{-3}	6.895	2.970	1.137×10^{-3}
	2.0 (l/b=8.0, l/h=4.44)	5.539	3.198	2.280×10^{-4}	6.895	2.970	2.229×10^{-4}
	0.5 (l/b=2.0, l/h=1.11)	5.539	3.198	5.702×10^{-5}	6.895	2.970	5.364×10^{-5}
EHS 400x200x8	10.0 (l/b=50, l/h=25.2)	100.75	58.168	1.344×10^{-2}	125.32	55.349	1.341×10^{-2}
	2.0 (l/b=10.0, l/h=5.0)	20.150	11.634	5.376×10^{-4}	25.064	11.070	5.313×10^{-4}
	0.5 (l/b=2.5, l/h=1.25)	5.037	2.908	3.360×10^{-5}	6.266	2.767	3.236×10^{-5}

Πίν. 2. Max τιμές των M_w , M_t^S , θ_x σε ράβδους διατομής HEB100 και max τιμές των σ_{VM} , τ_{xn}^P και θ_x σε ράβδους διατομής RHS 160x80x6.3, 450x250x8 και EHS 400x200x8

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] VLASOV V. *Thin-walled Elastic Beams*, Isr. Prog. for Scient. Transl., Jerusalem, 1963.
- [2] ROIK K. and SEDLACEK G. "Theorie der Wölbkrafttorsion unter Berücksichtigung der sekundären Schubverformungen—Analogiebetrachtung zur Berechnung des querbelasteten Zugstabes", *Stahlbau*, Vol. 35, 1966, pp. 43–52.
- [3] RUBIN H. "Wölbkrafttorsion von Durchlaufträgern mit konstantem Querschnitt unter Berücksichtigung sekundärer Schubverformungen", *Stahlbau*, Vol. 74, 2005 pp. 826–842.
- [4] MURIN J. and KUTIS V. "An effective finite element for torsion of constant cross-sections including warping with secondary torsional moment deformation effect", *Engineering Structures*, Vol. 30, 2008, pp.2716–2723.
- [5] SAPOUNTZAKIS E. and MOKOS V. "Secondary Torsional Moment Deformation Effect by BEM", *Proc. of 10th Inter. Conf. of Adv. in BETEQ*, Athens, Greece, 2009, pp. 81-88.
- [6] KRAUS M. "Computerorientierte Bestimmung der Schubkorrekturfaktoren gewalzter I-Profile", *Festschrift Rolf Kindmann*, Shaker Verlag, 2007, pp. 81-98.
- [7] RUBIN H. "Torsions-Querschnittswerte für rechteckige Hohlprofile nach EN 10210-2:2006 und EN 10219-2:2006", *Stahlbau*, Vol. 76, 2007, pp. 21–33.
- [8] SAPOUNTZAKIS E. and MOKOS V. "Warping Shear Stresses in Nonuniform Torsion by BEM", *Computational Mechanics*, Vol. 30, 2003, pp. 131-142.

SECONDARY TWISTING MOMENT DEFORMATION EFFECT ON THE ANALYSIS OF BARS OF ARBITRARILY SHAPED CROSS SECTION

Evangelos J. Sapountzakis

Associate Professor

School of Civil Engineering, National Technical University of Athens

Zografou Campus, GR-157 80, Athens, Greece

e-mail: cvsapoun@central.ntua.gr

Vasileios J. Tsipiras

PhD Student

School of Civil Engineering, National Technical University of Athens

Zografou Campus, GR-157 80, Athens, Greece

e-mail: tsipiras@gmail.com

Vasileios G. Mokos

Dr Civil Engineer

School of Civil Engineering, National Technical University of Athens

Zografou Campus, GR-157 80, Athens, Greece

e-mail: vgmokos@central.ntua.gr

SUMMARY

In this paper the secondary twisting moment deformation effect (STMDE) is investigated on the nonuniform torsional analysis of steel bars of arbitrarily shaped doubly symmetric section. At first, the extended nonuniform torsion theory is formulated taking into account the STMDE and torsional shear correction factors are evaluated for a large number of standard, open- or closed-shaped steel sections. The evaluation methodology is based on an energy approach, while the numerical solution is performed using Boundary Element Method (BEM). The developed procedure does not rely on the assumption of Thin Tube Theory (TTT), therefore cross sections of arbitrary shape may be analyzed. The limits of reliable use of TTT are determined regarding to the evaluation of torsional geometrical parameters. Moreover, numerical examples of great practical interest are worked out through which the STMDE is demonstrated on open- and closed-shaped section bars. Finally, the consequences of ignoring torsional warping effects on hollow section bars, that EC3 - part 1.1 allows as a simplification, are quantified.