

ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΡΑΒΔΩΝ ΚΑΤΑΠΟΝΟΥΜΕΝΩΝ ΚΑΤΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΑΠΟ ΘΛΙΨΗ ΚΑΙ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟ

Τάσος Αβραάμ

Λέκτορας Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα, Ελλάδα

e-mail: avraamt@central.ntua.gr

Γεώργιος Ιωαννίδης

Καθηγητής Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα, Ελλάδα

e-mail: gioanid@central.ntua.gr

1. ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία μελετώνται διάφορες περιπτώσεις ευστάθειας ράβδων οι οποίες καταπονούνται κατά τμήματα από αξονική θλίψη και εφελκυσμό. Για κάθε περίπτωση διατυπώνονται οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση της ράβδου, οι λύσεις των οποίων με την βοήθεια των συνοριακών συνθηκών και των συνθηκών συνέχειας οδηγούν στην εξίσωση λυγισμού. Από την εξίσωση λυγισμού προσδιορίζεται το κρίσιμο φορτίο και ο συντελεστής ισοδυναμίου μήκους λυγισμού της ράβδου. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για διάφορους συνδυασμούς θλιπτικών και εφελκυστικών δυνάμεων καθώς επίσης και για διάφορους λόγους μηκών των τμημάτων που βρίσκονται υπό θλίψη ή υπό εφελκυσμό ως προς το συνολικό μήκος της ράβδου.

2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε πολλές περιπτώσεις σε πολυώροφα μεταλλικά κτίρια τα οριζόντια στοιχεία (δοκοί) κατασκευάζονται ως δικτύωματα ώστε να εξασφαλίζεται οικονομικότητα στη στατική λύση, δυσκαμψία του συστήματος, δυνατότητα γεφύρωσης μεγαλύτερων σχετικά ανοιγμάτων όταν υπάρχει αραιή διάταξη των κατακόρυφων στοιχείων (υποστυλωμάτων) αλλά και δυνατότητα διέλευσης, μέσω των ανοιγμάτων που οι ράβδοι αφήνουν μεταξύ τους, καναλιών κλιματισμού ή και άλλων δικτύων εξυπηρέτησης του κτιρίου

Στις περιπτώσεις αυτές το πάνω πέλμα των δικτυωμάτων διαθέτει κατά κανόνα πυκνή ή και συνεχή πλευρική εξασφάλιση. Αντιθέτως το κάτω πέλμα είναι κατ' αρχήν πλευρικά μη προστατευμένο σε ολόκληρο το μήκος του. Υπό τα κατακόρυφα φορτία το κάτω πέλμα έχει συνήθως θλιβόμενα τμήματα στις ακραίες παρά τα υποστυλώματα περιοχές του και εφελκυστικό κεντρικό τμήμα ενώ υπό τα οριζόντια φορτία (κυρίως τα σεισμικά) μπορεί να είναι εν μέρει θλιβόμενο και εν μέρει εφελκυστικό. Ανακύπτει επομένως θέμα προσδιορισμού της αντοχής έναντι λυγισμού εκτός του επιπέδου του δικτυώματος μιας ράβδου που βρίσκεται εν μέρει υπό θλίψη και εν μέρει υπό εφελκυσμό. Το εύρος των επί μέρους αυτών τμημάτων εξαρτάται από τη γεωμετρία της κατασκευής και το σχετικό μέγεθος των φορτίων. Ο μελετητής κατά τη μόρφωση και διαστασιολόγηση του φέροντος οργανισμού προβλέπει κατά κανόνα ράβδους πλευρικής εξασφάλισης απολήγουσες σε κάποιο στοιχείο δυσκαμψίας. Οι θέσεις των ράβδων αυτών αντιστοιχούν συνήθως σε κόμβους των δικτυωμάτων και επιλέγονται σε θέσεις αλλαγής προσήμου της αξονικής έντασης για τις κύριες φορτίσεις ή και πυκνότερα. Επειδή ωστόσο οι θέσεις αυτές μεταβάλλονται με το συνδυασμό φορτίων που εξετάζεται, παραμένουν πάντοτε επί μέρους τμήματα με εναλλαγή προσήμου της αξονικής δύναμης αλλά και είναι επιθυμητό να είναι

γνωστή η επάρκεια ενός, χωρίς πλευρική προστασία ενιαίου κάτω πέλματος η διερεύνηση της σχετικής αντοχής έχει σημαντικό ενδιαφέρον.

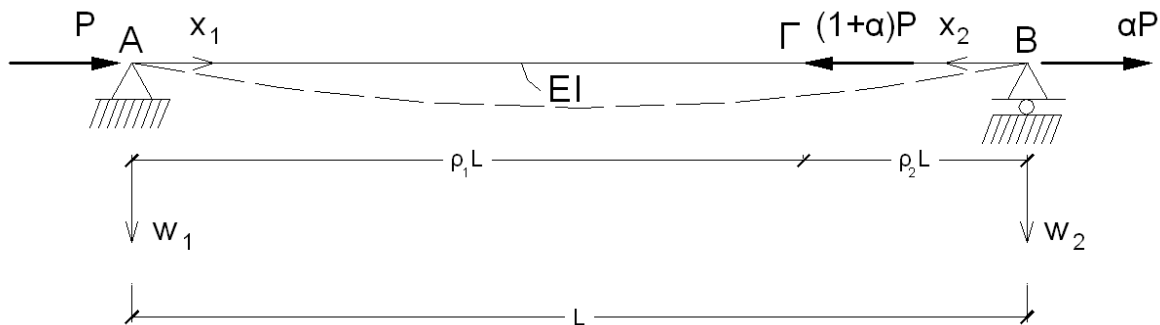
Η περίπτωση αξονικών θλιπτικών φορτίων σκαλωτής μορφής σε γραμμικά στοιχεία με κύριο ενδιαφέρον την αναζήτηση κρίσιμων φορτίων αναφέρεται στη κλασσική [1] αλλά και νεότερη [2] σχετική βιβλιογραφία. Σχετική είναι και η εργασία των Τ. Αβραάμ και Γ. Ιωαννίδη [3] για θλιβόμενα στοιχεία με σταθερή διατομή και μεταβλητή αξονική δύναμη.

Στην παρούσα εργασία προσδιορίζεται ο συντελεστής ισοδυνάμου μήκους λυγισμού συγκριτικά προς ένα μέλος που φέρει σε ολόκληρο το μήκος τη θλιπτική αξονική δύναμη του υπό θλίψη τμήματος του μέλους. Μέσω του συντελεστή αυτού μπορεί ευχερώς να προσδιορίζεται η αντοχή του ενιαίου μέλους. Εξετάζονται τρεις περιπτώσεις: (α) ράβδος με ένα ακραίο τμήμα υπό θλίψη και το υπόλοιπο υπό εφελκυσμό, (β) ράβδος με δύο ακραία τμήματα υπό εφελκυσμό και ένα κεντρικό τμήμα υπό θλίψη, (γ) ράβδος με δύο ακραία τμήματα υπό θλίψη και ένα κεντρικό τμήμα υπό εφελκυσμό και (δ) ράβδος με σκαλωτή μεταβολή της θλιπτικής δύναμης. Κάθε επί μέρους περίπτωση με εύλογες συντηρητικές απλοποιήσεις μπορεί να ανάγεται σε μία από τις τρεις αναφερόμενες περιπτώσεις.

3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Περίπτωση (α):

(Ένα τμήμα της ράβδου υπό θλίψη και το υπόλοιπο τμήμα υπό εφελκυσμό)



Σχ. 1. Αμφιαρθρωτή ράβδος με ένα τμήμα υπό θλίψη και ένα τμήμα υπό εφελκυσμό

Η ισορροπία της ράβδου AB δίδεται από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{d^4 w_i}{x_i^4} + k^2 \cdot \frac{d^2 w_i}{x_i^2} = 0 \quad 0 \leq x_i \leq l_i = \rho_i \cdot L \quad (1\alpha)$$

$$\frac{d^4 w_j}{x_j^4} - \alpha \cdot k^2 \cdot \frac{d^2 w_j}{x_j^2} = 0 \quad 0 \leq x_j \leq l_j = \rho_j \cdot L \quad (1\beta)$$

όπου $i=1, j=2$ και $k^2=P/EI$

Η γενική λύση των ανωτέρω εξισώσεων δίδεται από τις σχέσεις

$$w_i(x_i) = A_i \cdot \sin(k \cdot x_i) + B_i \cdot \cos(k \cdot x_i) + \Gamma_i \cdot x_i + \Delta_i \quad (2\alpha)$$

$$w_j(x_j) = A_j \cdot \sinh \sqrt{\alpha} \cdot (k \cdot x_j) + B_j \cdot \cosh \sqrt{\alpha} \cdot (k \cdot x_j) + \Gamma_j \cdot x_j + \Delta_j \quad (2\beta)$$

για $i=1$ και $j=2$

Οι συνοριακές συνθήκες και οι συνθήκες συνέχειας στη ράβδο AB είναι οι κάτωθι:

$$w_1(0) = -EIw_1''(0) = w_2(0) = -EIw_2''(0) \quad (3\alpha-\delta)$$

$$w_1(\ell_1) = w_2(\ell_2) \quad (3\epsilon)$$

$$w_1'(\ell_1) = -w_2'(\ell_2) \quad (3\sigma\tau)$$

$$V_1(\ell_1) + V_2(\ell_2) = 0 \quad \text{ή} \quad -EI \cdot w_1'''(\ell_1) - P \cdot w_1'(\ell_1) - EI \cdot w_2'''(\ell_2) + \alpha P \cdot w_2'(\ell_2) = 0 \quad (3\zeta)$$

$$M_1(\ell_1) = M_2(\ell_2) \quad \text{ή} \quad -EI \cdot w_1''(\ell_1) = -EI \cdot w_2''(\ell_2) \quad (3\eta)$$

$$\text{όπου } ()'_i = \frac{d()}{dx_i}$$

Με τη βοήθεια των συνοριακών συνθηκών και των συνθηκών συνέχειας της ράβδου AB καταλήγουμε στην εξίσωση λυγισμού η οποία υπό μορφή ορίζουσας είναι

$$|\alpha_{ij}| = 0 \quad i, j = 1 - 2 \quad (4\alpha)$$

όπου

$$\alpha_{11} = \sin(\rho_1 \cdot kL) \cdot \frac{1 + \alpha}{kL \cdot (1 - \rho_1 \cdot (1 + \alpha))} \quad (4\beta) \quad \alpha_{12} = -1 \quad (4\gamma)$$

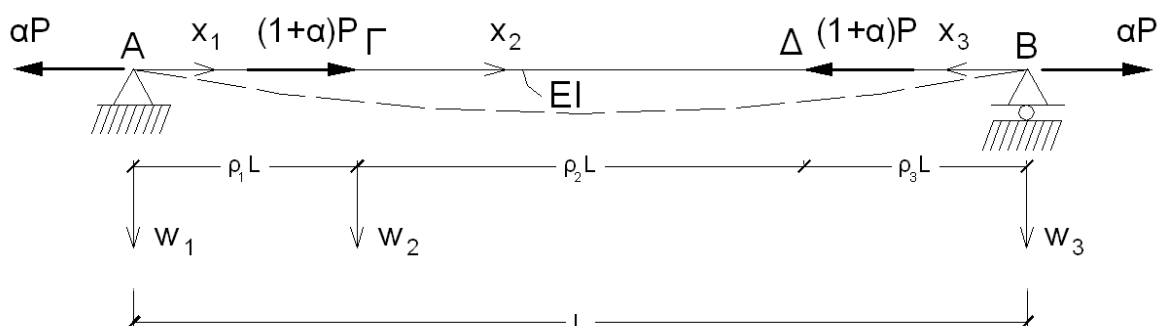
$$\alpha_{21} = \cos(\rho_1 \cdot kL) - \frac{\sin(\rho_1 \cdot kL)}{\tanh \sqrt{\alpha} \cdot (\rho_2 \cdot kL)} \quad (4\delta) \quad \alpha_{22} = \frac{1 + \alpha}{\sqrt{\alpha}} \quad (4\epsilon)$$

Από τη λύση της εξίσωσης (4) υπολογίστηκαν τα κρίσιμα φορτία και οι συντελεστές ισοδύναμου μήκους λυγισμού. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο πίνακα 1.

α ρ_1	0.20		0.40		0.60		0.80		1.00	
	β_{cr}^2	K=L'/L	β_{cr}^2	K=L'/L	β_{cr}^2	K=L'/L	β_{cr}^2	K=L'/L	β_{cr}^2	K=L'/L
0.100	52.879	0.432	70.129	0.375	86.573	0.338	101.907	0.311	116.310	0.291
0.200	28.266	0.591	34.152	0.538	40.539	0.493	47.291	0.457	54.392	0.426
0.300	23.133	0.653	27.441	0.600	32.553	0.551	38.519	0.506	45.404	0.466
0.400	22.092	0.668	26.338	0.612	31.583	0.559	37.807	0.511	44.748	0.470
0.500	21.984	0.670	26.021	0.616	30.586	0.568	35.230	0.529	39.478	0.500
0.600	20.767	0.689	23.669	0.646	26.520	0.610	29.089	0.582	31.280	0.562
0.700	18.154	0.737	19.899	0.704	21.541	0.677	23.012	0.655	24.291	0.637
0.800	15.174	0.806	16.154	0.782	17.094	0.760	17.972	0.741	18.777	0.725
0.900	12.380	0.893	12.819	0.877	13.254	0.863	13.683	0.849	14.103	0.837
1.000	9.870	1.000	9.870	1.000	9.870	1.000	9.870	1.000	9.870	1.000

Πίν. 1. Κρίσιμα φορτία και ισοδύναμα μήκη λυγισμού αμφιαρθρωτής ράβδου με ένα τμήμα υπό θλίψη και ένα τμήμα υπό εφελκυσμό για διάφορες τιμές των α και ρ_1 .

Περίπτωση (β): (Τα άκρα της ράβδου υπό εφελκυσμό και το κεντρικό τμήμα υπό θλίψη)



Σχ. 2. Αμφιαρθρωτή ράβδος με εφελκυσόμενα άκρα και το κεντρικό τμήμα υπό θλίψη

Η ισοροπία της ράβδου AB δίδεται από τις εξισώσεις 1α και 1β όπου $i=2$ και $j=1,3$.

Η γενική λύση των ανωτέρω εξισώσεων δίδεται αντιστοίχως από τις σχέσεις 2α και 2β όπου $i=2$ και $j=1,3$.

Οι συνοριακές συνθήκες και οι συνθήκες συνέχειας στη ράβδο AB είναι οι κάτωθι:

$$w_1(0) = -EI \cdot w_1''(0) = w_3(0) = -EI \cdot w_3''(0) = 0 \quad (5\alpha-\delta)$$

$$w_1(\ell_1) = w_2(0) \quad (5\epsilon)$$

$$w_1'(\ell_1) = w_2'(0) \quad (5\sigma\tau)$$

$$V_1(\ell_1) = V_2(0) \quad \text{ή} \quad -EI \cdot w_1'''(\ell_1) + \alpha P \cdot w_1'(\ell_1) = -EI \cdot w_2'''(0) - P \cdot w_2'(0) \quad (5\zeta)$$

$$M_1(\ell_1) = M_2(0) \quad \text{ή} \quad -EI \cdot w_1''(\ell_1) = -EI \cdot w_2''(0) \quad (5\eta)$$

$$w_2(\ell_2) = w_3(\ell_3) \quad (5\theta)$$

$$w_2'(\ell_2) = -w_3'(\ell_3) \quad (5\iota)$$

$$V_2(\ell_2) + V_3(\ell_3) = 0 \quad \text{ή} \quad -EI \cdot w_2'''(\ell_2) - P \cdot w_2'(\ell_2) - EI \cdot w_3'''(\ell_3) + \alpha P \cdot w_3'(\ell_3) = 0 \quad (5\kappa)$$

$$M_1(\ell_1) = M_2(\ell_2) \quad \text{ή} \quad -EI \cdot w_1''(\ell_1) = -EI \cdot w_2''(\ell_2) \quad (5\lambda)$$

Η εξίσωση λυγισμού της ράβδου AB υπό μορφή ορίζουσας δίδεται από τη σχέση

$$|\alpha_{ij}| = 0 \quad i, j = 1 - 4 \quad (6\alpha)$$

όπου

$$\alpha_{11} = \sqrt{\alpha} \cdot \cosh(\rho_1 \sqrt{\alpha} \cdot kL) \quad (6\beta) \quad \alpha_{12} = 1 + \alpha \quad (6\gamma)$$

$$\alpha_{13} = -1 \quad (6\delta) \quad \alpha_{14} = 0 \quad (8\epsilon)$$

$$\alpha_{21} = \sinh(\rho_1 \sqrt{\alpha} \cdot kL) \cdot [1 + \alpha \cdot (1 - \cos(\rho_2 \cdot kL))] \quad (6\sigma\tau)$$

$$\alpha_{22} = \rho_1 \cdot kL - \alpha \rho_2 \cdot kL + \rho_3 \cdot kL \quad (6\zeta)$$

$$\alpha_{23} = \sin(\rho_2 \cdot kL) \quad (6\eta) \quad \alpha_{24} = -\sinh(\rho_3 \sqrt{\alpha} \cdot kL) \quad (6\theta)$$

$$\alpha_{31} = \alpha \cdot \sinh(\rho_1 \sqrt{\alpha} \cdot kL) \cdot \sin(\rho_2 \cdot kL) \quad (6\iota) \quad \alpha_{32} = -(1 + \alpha) \quad (6\kappa)$$

$$\alpha_{33} = \cos(\rho_2 \cdot kL) \quad (6\lambda) \quad \alpha_{34} = \sqrt{\alpha} \cdot \cosh(\rho_3 \sqrt{\alpha} \cdot kL) \quad (6\mu)$$

$$\alpha_{41} = \alpha \cdot \sinh(\rho_1 \sqrt{\alpha} \cdot kL) \cdot \cos(\rho_2 \cdot kL) \quad (6\nu) \quad \alpha_{42} = 0 \quad (6\xi)$$

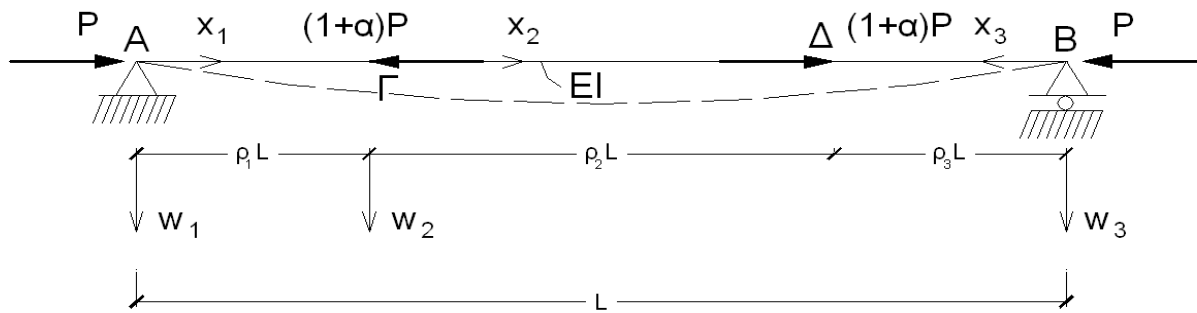
$$\alpha_{43} = -\sin(\rho_2 \cdot kL) \quad (8\omicron) \quad \alpha_{44} = -\alpha \cdot \sinh(\rho_3 \sqrt{\alpha} \cdot kL) \quad (6\pi)$$

Στο πίνακα 2 παρουσιάζονται κρίσιμα φορτία και συντελεστές ισοδύναμου μήκους λυγισμού της δοκού AB της περίπτωσης (β) για διάφορες τιμές των α και ρ_1 .

α	0.20		0.40		0.60		0.80		1.00	
	β_{cr}^2	$K=L'/L$	β_{cr}^2	$K=L'/L$	β_{cr}^2	$K=L'/L$	β_{cr}^2	$K=L'/L$	β_{cr}^2	$K=L'/L$
0.000	9.870	1.000	9.870	1.000	9.870	1.000	9.870	1.000	9.870	1.000
0.050	12.743	0.880	13.337	0.860	13.966	0.841	14.629	0.821	15.327	0.802
0.100	17.063	0.761	18.897	0.723	20.891	0.687	22.988	0.655	25.110	0.627
0.150	23.913	0.642	28.139	0.592	32.413	0.552	36.343	0.521	39.742	0.498
0.200	35.414	0.528	43.490	0.476	50.190	0.443	55.342	0.422	59.305	0.408
0.250	55.791	0.421	68.626	0.379	77.298	0.357	83.455	0.344	88.138	0.335
0.300	88.366	0.334	105.350	0.306	123.694	0.282	132.071	0.273	138.691	0.267
0.350	92.533	0.327	109.764	0.300	130.211	0.275	154.076	0.253	181.617	0.233
0.400	113.065	0.295	136.607	0.269	162.155	0.247	189.165	0.228	217.568	0.213
0.450	211.515	0.216	280.518	0.188	346.290	0.169	407.626	0.156	465.239	0.146

Πίν.2. Κρίσιμα φορτία και ισοδύναμα μήκη λυγισμού αμφιαρθρωτής ράβδου με εφελκόμενα άκρα και το μεσαίο τμήμα υπό θλίψη για διάφορες τιμές των α και ρ_1 .

Περίπτωση (γ): (Τα άκρα της ράβδου υπό θλίψη και το κεντρικό τμήμα υπό εφελκυσμό)



Σχ. 3. Αμφιαρθρωτή ράβδος με θλιβόμενα άκρα και κεντρικό εφελκυσμένο τμήμα

Η ισοροπία της ράβδου AB δίδεται από τις διαφορικές εξισώσεις 1α και 1β των οποίων η γενική λύση δίδεται από τις εξισώσεις 2α και 2β αντίστοιχα, όπου $i=1,3$ και $j=2$. Οι συνοριακές συνθήκες και οι συνθήκες συνέχειας στη ράβδο AB δίδονται από τις εξ. (7α)-(7λ). Η εξίσωση λυγισμού της ράβδου AB υπό μορφή ορίζουσας είναι:

$$|\alpha_{ij}| = 0 \quad i, j = 1 - 4 \quad (7\alpha)$$

όπου

$$\alpha_{11} = \cos(\rho_1 \cdot kL) \quad (7\beta) \quad \alpha_{12} = 1 + \frac{1}{\alpha} \quad (7\gamma)$$

$$\alpha_{13} = -\sqrt{\alpha} \quad (7\delta) \quad \alpha_{14} = 0 \quad (7\epsilon)$$

$$\alpha_{21} = \sin(\rho_1 \cdot kL) \cdot \left[1 + \frac{1}{\alpha} \cdot (1 - \cosh(\rho_2 \sqrt{\alpha} \cdot kL)) \right] \quad (7\sigma\tau)$$

$$\alpha_{22} = \rho_1 \cdot kL - \rho_2 \cdot kL / \alpha + \rho_3 \cdot kL \quad (7\zeta) \quad \alpha_{23} = \sinh(\rho_2 \sqrt{\alpha} \cdot kL) \quad (7\eta)$$

$$\alpha_{24} = -\sin(\rho_3 \cdot kL) \quad (7\theta) \quad \alpha_{31} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \sin(\rho_1 \cdot kL) \cdot \sinh(\rho_2 \sqrt{\alpha} \cdot kL) \quad (7\iota)$$

$$\alpha_{32} = \frac{1}{\alpha} + 1 \quad (7\kappa) \quad \alpha_{33} = -\sqrt{\alpha} \cdot \cosh(\rho_2 \sqrt{\alpha} \cdot kL) \quad (7\lambda)$$

$$\alpha_{34} = \cos(\rho_3 \cdot kL) \quad (7\mu)$$

$$\alpha_{41} = -\sin(\rho_1 \cdot kL) \cdot \cosh(\rho_2 \sqrt{\alpha} \cdot kL) \quad (7\nu) \quad \alpha_{42} = 0 \quad (7\xi)$$

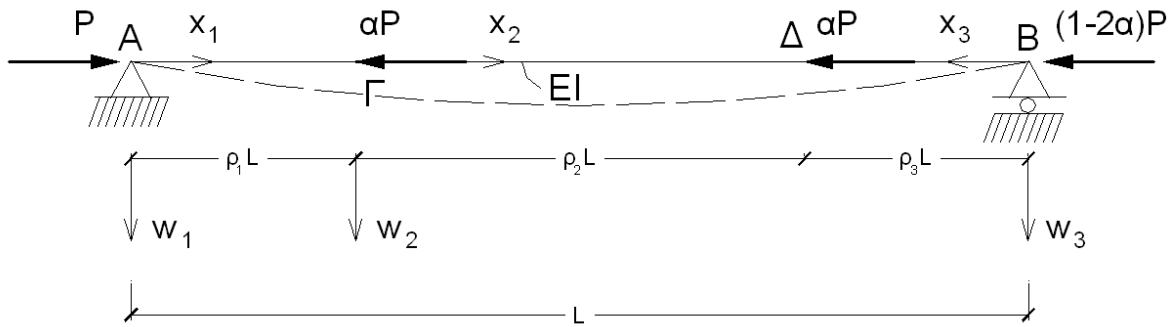
$$\alpha_{43} = \alpha \cdot \sinh(\rho_2 \sqrt{\alpha} \cdot kL) \quad (7\omicron) \quad \alpha_{44} = \sin(\rho_3 \cdot kL) \quad (7\pi)$$

Ο πίνακας 3 παρουσιάζει κρίσιμα φορτία και συντελεστές ισοδύναμου μήκους λυγισμού.

α	0.20		0.40		0.60		0.80		1.00	
	β_{cr}^2	$K=L'/L$	β_{cr}^2	$K=L'/L$	β_{cr}^2	$K=L'/L$	β_{cr}^2	$K=L'/L$	β_{cr}^2	$K=L'/L$
0.05	78.200	0.355	127.867	0.278	173.795	0.238	213.006	0.215	246.740	0.200
0.100	29.122	0.582	36.811	0.518	45.425	0.466	54.008	0.427	61.975	0.399
0.150	18.714	0.726	21.079	0.684	23.652	0.646	26.341	0.612	29.044	0.583
0.200	14.459	0.826	15.427	0.800	16.436	0.775	17.474	0.752	18.526	0.730
0.250	12.274	0.897	12.714	0.881	13.161	0.866	13.612	0.852	14.064	0.838
0.300	11.051	0.945	11.251	0.937	11.450	0.928	11.649	0.920	11.848	0.913
0.350	10.366	0.976	10.447	0.972	10.528	0.968	10.608	0.965	10.687	0.961
0.400	10.020	0.992	10.044	0.991	10.068	0.990	10.092	0.989	10.116	0.988
0.450	9.889	0.999	9.892	0.999	9.895	0.999	9.898	0.999	9.902	0.998
0.500	9.870	1.000	9.870	1.000	9.870	1.000	9.870	1.000	9.870	1.000

Πίν.3. Κρίσιμα φορτία και ισοδύναμα μήκη λυγισμού αμφιαρθρωτής ράβδου με θλιβόμενα άκρα και το μεσαίο τμήμα υπό εφελκυσμό για διάφορες τιμές των α και ρ_1

Περίπτωση (δ): (Θλιβόμενη ράβδος υπό τμηματικά μεταβαλλόμενου αξονικού φορτίου)



Σχ. 4. Αμφιαρθρωτή θλιβόμενη ράβδος υπό τμηματικά μεταβαλλόμενου αξονικού φορτίου

Η ισορροπία της ράβδου AB δίδεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^4 w_1}{x_1^4} + k^2 \cdot \frac{d^2 w_1}{x_1^2} = 0 \quad 0 \leq x_1 \leq \ell_1 = \rho_1 \cdot L \quad (8\alpha)$$

$$\frac{d^4 w_2}{x_2^4} + (1 - \alpha) \cdot k^2 \cdot \frac{d^2 w_2}{x_2^2} = 0 \quad 0 \leq x_2 \leq \ell_2 = \rho_2 \cdot L \quad (8\beta)$$

$$\frac{d^4 w_3}{x_3^4} + (1 - 2 \cdot \alpha) \cdot k^2 \cdot \frac{d^2 w_3}{x_3^2} = 0 \quad 0 \leq x_3 \leq \ell_3 = \rho_3 \cdot L \quad (8\gamma)$$

η λύση των ανωτέρω διαφορικών εξισώσεων είναι:

$$w_1(x_1) = A_1 \cdot \sin(k \cdot x_1) + B_1 \cdot \cos(k \cdot x_1) + \Gamma_1 \cdot x_1 + \Delta_1 \quad (9\alpha)$$

$$w_2(x_2) = A_2 \cdot \sin \sqrt{1 - \alpha} \cdot (k \cdot x_2) + B_2 \cdot \cos \sqrt{1 - \alpha} \cdot (k \cdot x_2) + \Gamma_2 \cdot x_2 + \Delta_2 \quad (9\beta)$$

$$w_3(x_3) = A_3 \cdot \sin \sqrt{1 - 2 \cdot \alpha} \cdot (k \cdot x_3) + B_3 \cdot \cos \sqrt{1 - 2 \cdot \alpha} \cdot (k \cdot x_3) + \Gamma_3 \cdot x_3 + \Delta_3 \quad (9\gamma)$$

Οι συνοριακές συνθήκες και οι συνθήκες συνέχειας στη ράβδο AB δίδονται από τις εξ. (7α)-(7λ). Από τις εξ. (13) και (7) καταλήγουμε στην εξίσωση λυγισμού η οποία δίδεται υπό μορφή ορίζουσας:

$$|\alpha_{ij}| = 0 \quad i, j = 1 - 4 \quad (10)$$

όπου

$$\alpha_{11} = \cos(\rho_1 \cdot kL) \quad (10\beta) \quad \alpha_{12} = -\frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad (10\gamma)$$

$$\alpha_{13} = -\sqrt{1 - \alpha} \quad (10\delta) \quad \alpha_{14} = 0 \quad (10\epsilon)$$

$$\alpha_{21} = \frac{\sin(\rho_1 \cdot kL)}{1 - \alpha} \cdot (\cos(\rho_2 \sqrt{1 - \alpha} \cdot kL) - \alpha) \quad (10\sigma\tau)$$

$$\alpha_{22} = \rho_1 \cdot kL - \frac{1}{1 - \alpha} \cdot \rho_2 \cdot kL + \frac{1}{1 - 2\alpha} \rho_3 \cdot kL \quad (10\zeta)$$

$$\alpha_{23} = \sin(\rho_2 \sqrt{1 - \alpha} \cdot kL) \quad (10\eta)$$

$$\alpha_{24} = -\sin(\rho_3 \sqrt{1 - 2\alpha} \cdot kL) \quad (10\theta) \quad \alpha_{31} = -\frac{\sin(\rho_1 \cdot kL)}{\sqrt{1 - \alpha}} \cdot \sin(\rho_2 \sqrt{1 - \alpha} \cdot kL) \quad (10\iota)$$

$$\alpha_{32} = \frac{1}{1 - \alpha} + \frac{1}{1 - 2\alpha} \quad (10\kappa) \quad \alpha_{33} = \sqrt{1 - \alpha} \cdot \cos(\rho_2 \sqrt{1 - \alpha} \cdot kL) \quad (10\lambda)$$

$$\alpha_{34} = \sqrt{1-2\alpha} \cdot \cos(\rho_3 \sqrt{1-2\alpha} \cdot kL) \quad (10\mu) \quad \alpha_{41} = \sin(\rho_1 \cdot kL) \cdot \cos(\rho_2 \sqrt{1-\alpha} \cdot kL) \quad (10\nu)$$

$$\alpha_{42} = 0 \quad (10\xi) \quad \alpha_{43} = (1-\alpha) \cdot \sin(\rho_2 \sqrt{1-\alpha} \cdot kL) \quad (10\omicron)$$

$$\alpha_{44} = -(1-2\alpha) \cdot \sin(\rho_3 \sqrt{1-2\alpha} \cdot kL) \quad (10\pi)$$

Στον πίνακα 4 παρουσιάζονται κρίσιμα φορτία και συντελεστές ισοδύναμου μήκους λυγισμού της δοκού AB της περίπτωσης (δ).

α ρ_1	0.00		0.10		0.20		0.30		0.40		0.50	
	β_{cr}^2	K=L'/L	β_{cr}^2	K=L'/L	β_{cr}^2	K=L'/L	β_{cr}^2	K=L'/L	β_{cr}^2	K=L'/L	β_{cr}^2	K=L'/L
0.00	9.870	1.000	10.966	0.949	12.337	0.894	14.099	0.837	16.449	0.775	19.739	0.707
0.050	9.870	1.000	10.964	0.949	12.324	0.895	14.057	0.838	16.330	0.777	19.423	0.713
0.100	9.870	1.000	10.959	0.949	12.297	0.896	13.966	0.841	16.083	0.783	18.805	0.724
0.150	9.870	1.000	10.954	0.949	12.269	0.897	13.876	0.843	15.848	0.789	18.257	0.735
0.200	9.870	1.000	10.951	0.949	12.251	0.898	13.818	0.845	15.700	0.793	17.929	0.742
0.250	9.870	1.000	10.950	0.949	12.245	0.898	13.801	0.846	15.658	0.794	17.839	0.744
0.300	9.870	1.000	10.951	0.949	12.251	0.898	13.820	0.845	15.705	0.793	17.941	0.742
0.350	9.870	1.000	10.953	0.949	12.264	0.897	13.860	0.844	15.806	0.790	18.163	0.737
0.400	9.870	1.000	10.956	0.949	12.277	0.897	13.903	0.843	15.917	0.787	18.411	0.732
0.450	9.870	1.000	10.957	0.949	12.287	0.896	13.935	0.842	15.999	0.785	18.598	0.728
0.500	9.870	1.000	10.958	0.949	12.291	0.896	13.946	0.841	16.028	0.785	18.666	0.727

Πίν.4. Κρίσιμα φορτία και ισοδύναμα μήκη λυγισμού αμφιαρθρωτής ράβδου υπό τμηματικά μεταβαλλόμενου αξονικού θλιπτικού φορτίου για διάφορες τιμές των α και ρ_1

4.ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή προσδιορίζονται οι συντελεστές ισοδύναμου μήκους λυγισμού και μέσω αυτών της αντοχής, ράβδων που καταπονούνται από αξονικές δυνάμεις σε μέρος του μήκους τους θλιπτικές και στο υπόλοιπο εφελκυστικές. Έχουν εξεταστεί περιπτώσεις που είναι συνήθεις στη πράξη για διάφορες αριθμητικές τιμές των εισαγομένων παραμέτρων και έχουν συνταχθεί σχετικοί πίνακες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Timoshenko S. P. and Gere J. M. "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill, New York, 1961
- [2] Wang C. M., Wang C. Y., Reddy J. N. "Exact solutions for Buckling of Structural Members", CRC Press LCC, USA, 2005
- [3] Αβραάμ Π. Τ., Ιωαννίδης Ι. Γ., "Θλιβόμενα Στοιχεία με Σταθερή Διατομή υπό Μεταβαλλόμενη Θλίψη", 5^ο Εθνικό Συνέδριο Μεταλλικών Κατασκευών, 2005, σελ. 449-455

BUCKLING OF BARS WHICH SPLIT IN COMPRESSIVE AND TENSILE PARTS

Tasos Avraam

Lecturer Metal Structures Laboratory
National Technical University of Athens
Athens, Greece

e-mail: avraamt@central.ntua.gr

George Ioannides

Professor Metal Structures Laboratory
National University of Athens
Athens, Greece

e-mail: gioanid@central.ntua.gr

SUMMARY

The buckling of members which simultaneously have parts under compression and parts under tension is a problem that may be met in designing steel structures such as industrial or commercial buildings with trusses as horizontal structural elements. Such cases are not included in codes or regulations which usually treat with members under uniform compression.

In the present study we are looking for critical loads as well as for equivalent buckling lengths of a bar which splits in compressive and tensile parts. The use of differential equations of equilibrium and the related boundary and continuity conditions of the bar lead to the corresponding buckling equation. Critical buckling loads and equivalent buckling lengths can be estimated for several parameters such as the ratio of the compressive or the tensile length to the whole length of the bar as well as the ratio of the tension to the compression axial forces which are developed simultaneously in different parts of the bar. The results of buckling loads and equivalent buckling lengths are presented via relative tables.