

ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΔΙΣΤΥΛΩΝ ΠΛΑΙΣΙΩΝ ΜΕ ΣΤΥΛΟΥΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

Τάσος Αβραάμ

Λέκτορας Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα, Ελλάδα

e-mail: avraamt@central.ntua.gr

Ζαχαρίας Φασουλάκης

Μεταπτυχιακός φοιτητής
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα, Ελλάδα

e-mail: fasoulakis-z@hotmail.com

Ιωάννης Ερμόπουλος

Καθηγητής Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα, Ελλάδα

e-mail: jermop@central.ntua.gr

1. ΠΕΡΙΛΗΨΗ

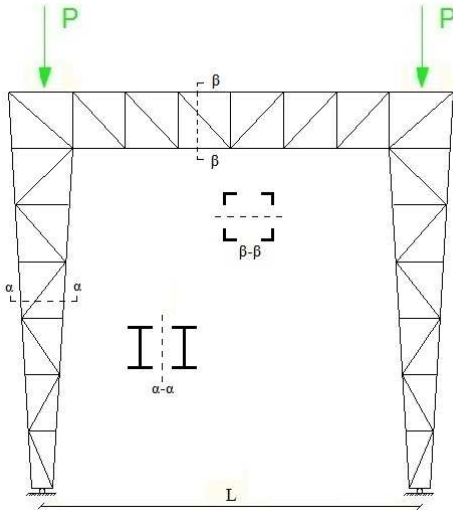
Στην παρούσα εργασία μελετάται η ευστάθεια ορθογωνικών δίστυλων μεταλλικών πλαισίων με στύλους μεταβλητής διατομής. Συγκεκριμένα, η μελέτη αυτή αφορά πλαίσια με στύλους διατομής μεταβλητής ροπής αδράνειας και σταθερού ή μεταβλητού εμβαδού. Υπολογίζονται τα κρίσιμα φορτία καθώς επίσης και οι τιμές του ισοδύναμου μήκους λυγισμού των στύλων του πλαισίου. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται σε διαγράμματα για διάφορες παραμέτρους, όπως ο λόγος μηκών και ροπών αδράνειας στύλου-ζυγώματος, καθώς και διάφορους λόγους μεταβολής της ροπής αδράνειας των στύλων.

2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το πρόβλημα λυγισμού στύλων μεταβλητής διατομής (διατομές σταθερού εμβαδού και μεταβλητής ροπής αδράνειας κυρίως αλλά και διατομές μεταβλητού εμβαδού και ροπής αδράνειας) συναντάται σε κτίρια με πλαίσια μεγάλου ανοίγματος. Ο Ευρωκώδικας EC3 δεν προβλέπει κάποιον κανόνα για την αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων και συνήθως αυτά τα προβλήματα επιλύονται με τη θεώρηση κάποιας ισοδύναμης διατομής σταθερού εμβαδού και ροπής αδράνειας καθ' όλο το ύψος των στύλων ώστε να μπορέσει ο μελετητής να εκτιμήσει κρίσιμα φορτία και μήκη λυγισμού. Τέτοιες, όμως, προσεγγίσεις δεν οδηγούν πάντα σε σωστές εκτιμήσεις κρίσιμων μεγεθών της κατασκευής με αποτέλεσμα τη μείωση του συντελεστού ασφάλειας ή τη σπατάλη υλικού.

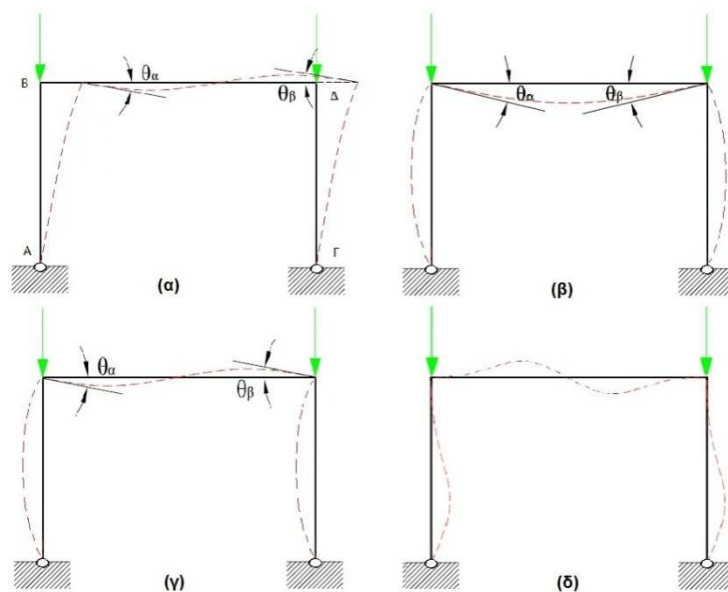
Η μελέτη ευστάθειας θλιβομένων στοιχείων μεταβλητής διατομής έχει απασχολήσει πολλούς μελετητές από τα μέσα του προηγούμενου αιώνα [1,2]. Αργότερα έγιναν σχετικές

μελέτες για τη συμπεριφορά πλαισίων με στύλους μεταβλητής ροπής αδράνειας και σταθερού εμβαδού μέσω γραμμικής και μη γραμμικής ανάλυσης από τον Ι. Ερμόπουλο [3,4] ο οποίος ερευνήσε την επιρροή των γεωμετρικών μεγεθών των μελών ενός μονόστυλου πλαισίου στο κρίσιμο φορτίο επιδιώκοντας τη βέλτιστη ικανότητα του πλαισίου έναντι λυγισμού. Ο Li Qiusheng, και οι λοιποί [5] μελέτησαν τον πρόβολο υπό θλίψη για διάφορες περιπτώσεις μεταβολής της διατομής του προβόλου (μεταβλητό εμβαδόν και μεταβλητή ροπή αδράνειας). Εκτεταμένη έρευνα για την εύρεση κρίσιμων φορτίων και μηκών λυγισμού για θλιβόμενα στοιχεία μεταβλητής διατομής(τυχόντα μέλη πλαισίων) έγινε από τον Ι. Ερμόπουλο [6].



Σχ. 1. Η γεωμετρία του φορέα

συμμετρικού λυγισμού (σχ.2α). Έτσι, στην παρούσα εργασία θα εξετάσουμε την περίπτωση αντισυμμετρικού λυγισμού με μετάθεση(ισοδύναμος φορέας το μισό πλαίσιο με οριζόντια κύλιση στο ζύγωμα) και την περίπτωση συμμετρικού λυγισμού (ισοδύναμος φορέας το μισό πλαίσιο με κατακόρυφα κυλιόμενη πάκτωση στο ζύγωμα). Οι στύλοι του πλαισίου είναι μεταβλητής διατομής (μεταβλητή ροπή αδράνειας και σταθερό ή μεταβλητό εμβαδόν).



Σχ. 2. Απεικόνιση παραμορφώσεων λυγισμού με (α) και χωρίς (β-δ) μετάθεση.

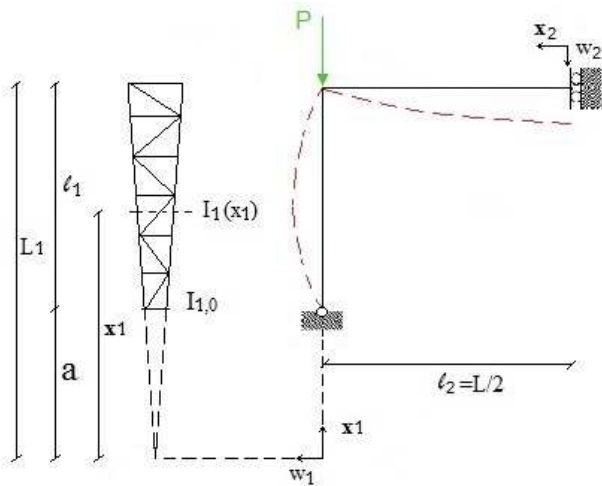
Η μελέτη επιρροής αρχικών ατελειών (γεωμετρική ατέλεια και εκκεντρότητα φορτίου) στύλου τμηματικά ή γραμμικά μεταβλητής διατομής επιβεβαιώθηκε μέσω αναλυτικής λύσης με εφαρμογή μη γραμμικής θεωρίας πεπερασμένων στοιχείων από τους Ι. Ραυτογιάννη και Ι. Ερμόπουλο [7].

Στην παρούσα μελέτη θα αναζητήσουμε φορτία λυγισμού και μήκη λυγισμού στύλων για ένα ορθογωνικό δίστυλο πλαίσιο με στύλους μεταβλητής διατομής. Το πλαίσιο (σχ. 1) μπορεί να λυγίσει με μετάθεση ή χωρίς μετάθεση σύμφωνα με το σχήμα 2. Το μικρότερο φορτίο χωρίς μετάθεση αντιστοιχεί στην περίπτωση

3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

3.A. Διατομή στύλου με σταθερό εμβαδόν και μεταβλητή ροπή αδρανείας.

3.A.1. Συμμετρικός λυγισμός.



Η ισορροπία του πλαισίου δίδεται από τις κάτωθι διαφορικές εξισώσεις:

$$EI_1(x_1) \cdot \frac{d^4 w_1}{dx_1^4} + P \cdot \frac{d^2 w_1}{dx_1^2} = 0 \quad (1\alpha)$$

$$\frac{d^4 w_2}{dx_2^4} = 0 \quad (1\beta)$$

όπου $I_1(x_1) = I_{1,0} \cdot \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^2$ και $I_{1,0}$ η ροπή αδράνειας στη βάση του στύλου.

Σχ. 3. Συμμετρικός λυγισμός

Η γενική λύση των ανωτέρω διαφορικών εξισώσεων είναι της μορφής

$$w_1(x_1) = \sqrt{\frac{x_1}{\alpha}} \cdot \left[A_1 \cdot \sin\left(\mu \cdot \ln \frac{x_1}{\alpha}\right) + B_1 \cdot \cos\left(\mu \cdot \ln \frac{x_1}{\alpha}\right) \right] + C_1 \cdot x_1 + D_1 \quad (2\alpha)$$

$$w(x_2) = A_2 \cdot x_2^3 + B_2 \cdot x_2^2 + C_2 \cdot x_2 + D_2 \quad (2\beta)$$

Οι συνοριακές συνθήκες και οι συνθήκες συνέχειας είναι:

$$w_1(\alpha) = \frac{d^2 w_1}{dx_1^2}(\alpha) = w_2(\ell_2) = 0 \quad (3\alpha-3\gamma)$$

$$\frac{dw_1}{dx_1}(L_1) = \frac{dw_2}{dx_2}(\ell_2) \quad (3\delta)$$

$$EI_1(L_1) \cdot \frac{d^2 w_1}{dx_1^2}(L_1) + EI_2 \cdot \frac{d^2 w_2}{dx_2^2}(\ell_2) = 0 \quad (3\epsilon)$$

$$w_2'(0) = 0 \quad (3\sigma\tau)$$

$$-EI_2 \frac{d^3 w_2}{dx_2^3}(0) = 0 \quad (3\zeta)$$

$$w_1(L_1) = 0 \quad (3\eta)$$

Με τη βοήθεια των συνοριακών συνθηκών και των συνθηκών συνέχειας εξ. (3α-3η) καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση λυγισμού του πλαισίου.

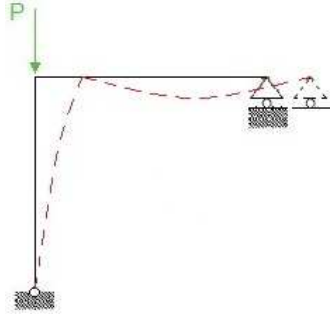
$$\tan[\mu \cdot \ln(\ell'_1 + 1)] = \frac{2 \cdot \mu}{\frac{\rho \cdot r \cdot \ell'_1 (\ell'_1 + 1) \cdot (4\mu^2 + 1)}{4 \cdot (0.5 \cdot \ell'_1 + 1)^2} + 1}, \quad (4)$$

όπου

$$r = \frac{\ell_2}{\ell_1}, \quad \rho = \frac{I_m}{I_2}, \quad \ell'_1 = \frac{\ell_1}{\alpha}, \quad \mu = \sqrt{\beta^2 \cdot \left(0.5 + \frac{1}{\ell'_1}\right)^2 - \frac{1}{4}}, \quad \beta^2 = \frac{P \cdot \ell_1^2}{E \cdot I_m}.$$

3.A.2. Αντισυμμετρικός λυγισμός με μετάθεση.

Όπως στην περίπτωση 3.A.1 έτσι και εδώ ισχύουν οι ίδιες διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας καθώς επίσης και οι εκφράσεις των αντίστοιχων βελών. Επιπλέον, ισχύουν οι ίδιες συνοριακές συνθήκες πλην των συνθηκών (3.ζ,η) που διαφοροποιούνται ως εξής:



Σχ. 4

$$-EI_1(L_1) \cdot \frac{d^3 w_1}{dx_1^3}(L_1) - P \cdot \frac{dw_1}{dx_1}(L_1) = 0 \quad (5\alpha)$$

$$w_2(0) = -EI_2 \frac{d^2 w_2}{dx_2^2}(0) = 0 \quad (5\beta, \gamma)$$

Μετά τη διαδικασία απαλοιφής των σταθερών A_i, B_i, C_i και D_i καταλήγουμε στην κάτωθι διαφορική εξίσωση:

$$\tan[\mu \cdot \ln(\ell'_1 + 1)] = \frac{2 \cdot \mu}{\rho \cdot r \cdot \ell'_1 (\ell'_1 + 1) \cdot (4\mu^2 + 1) - 1} \quad (6)$$

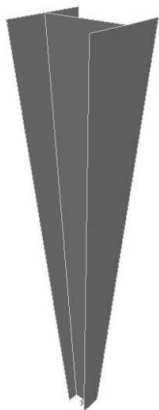
$$6 \cdot (0.5 \cdot \ell'_1 + 1)^2$$

Η επίλυση των δύο μη-γραμμικών εξισώσεων (4) και (6) μας δίνει τα κρίσιμα αδιάστατα

φορτία $\beta_{cr}^2 = \frac{P_{cr} \cdot \ell_1^2}{E \cdot I_m}$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε τα μήκη λυγισμού του στύλου.

3.B Διατομή στύλου με μεταβλητό εμβαδό και μεταβλητή ροπή αδράνειας.

3.B.1 Συμμετρικός λυγισμός.



Σχ. 5

Η ισορροπία του πλαισίου δίδεται από τις διαφορικές εξισώσεις (1α,1β) όπου όμως η ροπή αδράνειας του στύλου $I(x_1)$ δίδεται από την έκφραση:

$$I_1(x_1) = I_{1,0} \cdot \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^3 \quad (7)$$

Η περίπτωση αυτή αφορά μορφές διπλής μεταβολής με διατομές διπλού ταν με γραμμικά μεταβαλλόμενο ύψος κορμού και πελμάτων (σχ. 5).

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας του ζυγώματος είναι η ίδια ως και στις προηγούμενες περιπτώσεις (εξ.2β), ενώ η λύση της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας του στύλου αλλάζει και δίδεται από τη σχέση:

$$w_1(x_1) = A_1 \cdot \sqrt{x_1} \cdot BesselJ\left(1,2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) + B_1 \cdot \sqrt{x_1} \cdot BesselY\left(1,2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) + C_1 \cdot x_1 + D_1 \quad (8)$$

Οι συνοριακές συνθήκες και οι συνθήκες συνέχειας δίδονται από τις εξισώσεις 3α~3η. Με τη βοήθεια των συνοριακών συνθηκών και των εκφράσεων των βελών (σχ. 2β και 8) καταλήγουμε στην κάτωθι εξίσωση λυγισμού:

$$\frac{J_1 \cdot Y_1 - J_1 \cdot Y_1}{J_1 \cdot Y_0 - J_0 \cdot Y_1} = \frac{\beta \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\ell'_1}\right)^{3/2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\ell'_1}} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{\ell'_1}\right) \cdot (1 + r \cdot \rho \cdot \beta^2) - 1\right]}, \quad (9)$$

όπου $\mu = \beta \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\ell'}\right)^{3/2}$.

$$\text{Επίσης, } J_1 = \text{Bessel}J\left(1, \frac{2\mu}{\sqrt{1+\frac{1}{l'_1}}}\right), \quad J_\alpha = \text{Bessel}J(1, 2\mu\sqrt{l'_1}), \quad J_0 = \text{Bessel}J\left(0, \frac{2\mu}{\sqrt{1+\frac{1}{l'_1}}}\right),$$

$$Y_1 = \text{Bessel}Y\left(1, \frac{2\mu}{\sqrt{1+\frac{1}{l'_1}}}\right), \quad Y_\alpha = \text{Bessel}Y(1, 2\mu\sqrt{l'_1}), \quad Y_0 = \text{Bessel}Y\left(0, \frac{2\mu}{\sqrt{1+\frac{1}{l'_1}}}\right).$$

Όπου,

$$J_a(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+a+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+a}, \quad Y_a(x) = \frac{J_a(x) \cdot \cos(a\pi) - J_{-a}(x)}{\sin(a\pi)} \quad (10\alpha, \beta)$$

συναρτήσεις Bessel τάξης a , πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.

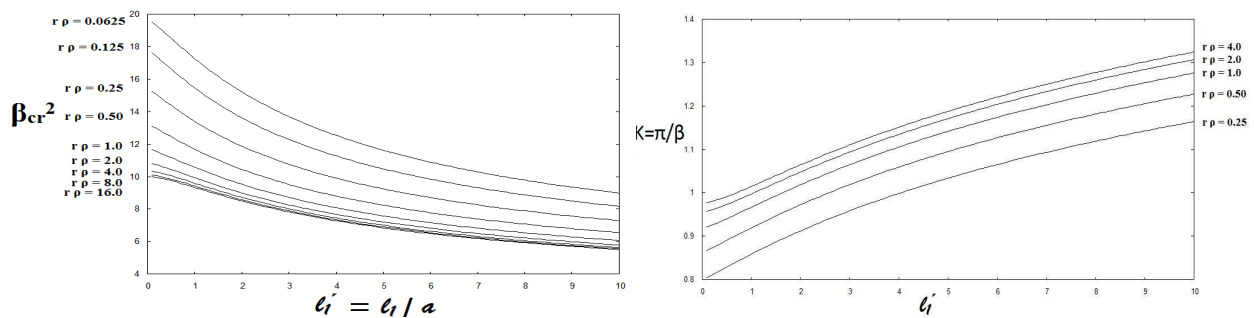
3.B.2 Αντισυμμετρικός λυγισμός.

Ομοίως για την περίπτωση αντισυμμετρικού λυγισμού σύμφωνα με τις συνοριακές συνθήκες που εξετάσαμε στην παράγραφο 3.A.2 προκύπτει η παρακάτω εξίσωση λυγισμού:

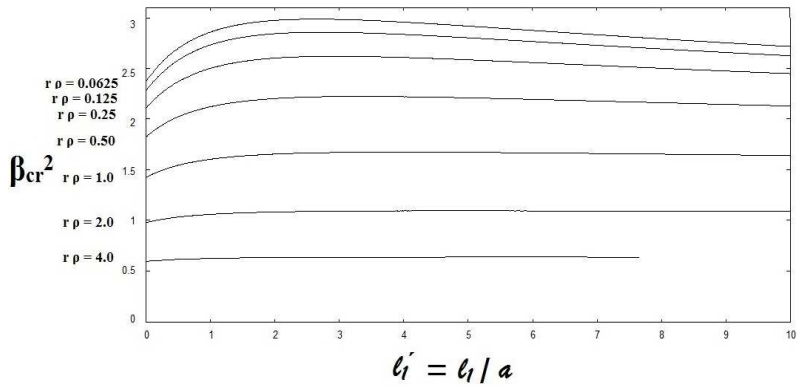
$$\frac{J_1 \cdot Y_1 - J_1 \cdot Y_1}{J_1 \cdot Y_0 - J_0 \cdot Y_1} = \frac{\beta \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{l'_1}\right)^{3/2}}{\sqrt{1+\frac{1}{l'_1}} \cdot \left[1 - \frac{\beta^2 \cdot r \cdot \rho}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{l'_1}\right)\right]} \quad (11)$$

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ -ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

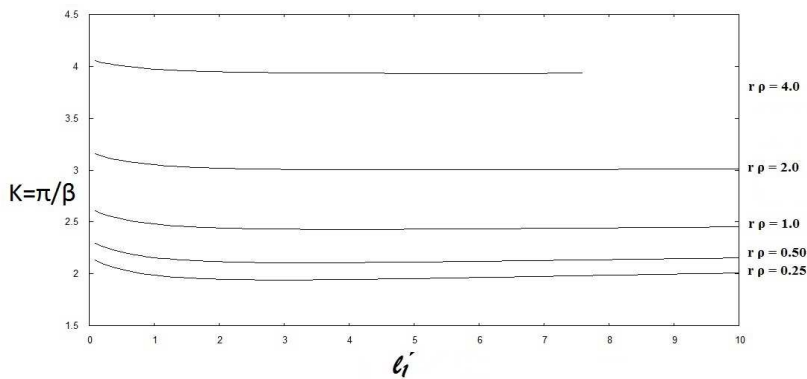
Στα σχήματα 6 και 7(α,β) παρουσιάζονται τα κρίσιμα φορτία και οι συντελεστές ισοδύναμου μήκους λυγισμού $K = l_{1,\lambda\gamma} / l_1$ για τις περιπτώσεις συμμετρικού και αντισυμμετρικού λυγισμού, αντίστοιχα, και για διάφορους λόγους ροπών αδρανείας και μηκών των πλαισίων, $r\rho = \frac{I_m \cdot l_2}{I_2 \cdot l_1}$, για την περίπτωση στύλου διατομής σταθερού εμβαδού και μεταβλητής ροπής αδρανείας.



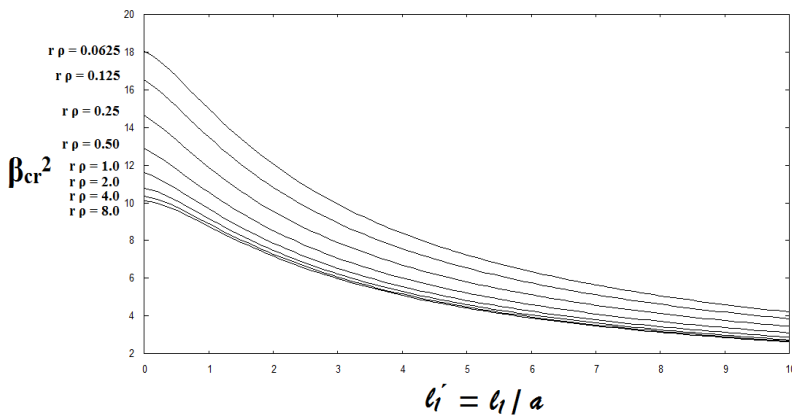
Σχ. 6. Δρόμοι ισορροπίας συμμετρικού λυγισμού διατομής στύλου με σταθερό εμβαδόν.



Σχήμα 7(α). Δρόμοι ισορροπίας αντισυμμετρικού λυγισμού διατομής στύλου με σταθερό εμβαδόν.

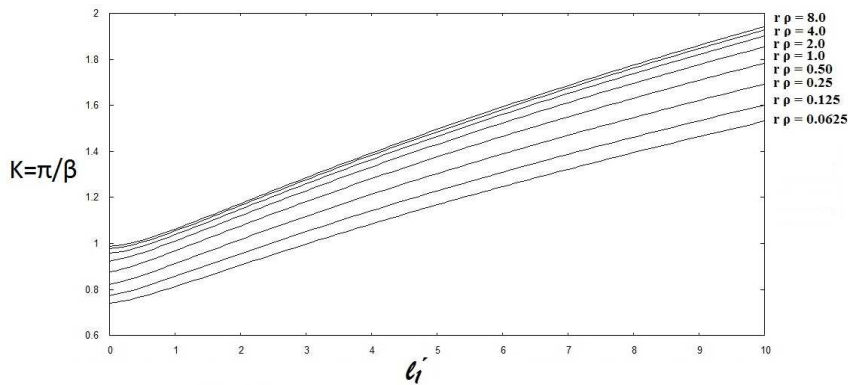


Σχ. 7(β). Ισοδύναμα μήκη αντισυμμετρικού λυγισμού διατομής στύλου με σταθερό εμβαδόν.

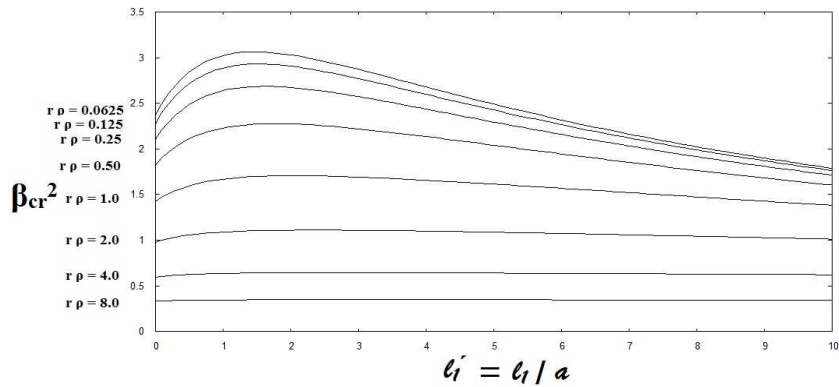


Σχ. 8(α). Δρόμοι ισορροπίας συμμετρικού λυγισμού διατομής στύλου με μεταβλητό εμβαδόν.

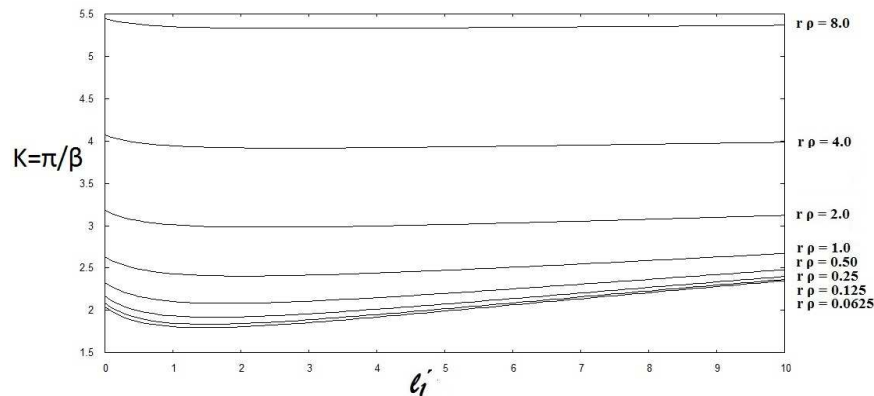
Στα σχήματα 8(α,β) και 9(α,β) παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα όπως προηγουμένως για την περίπτωση στύλου διατομής μεταβλητού εμβαδού και μεταβλητής ροπής αδράνειας.



Σχ. 8(β). Ισοδύναμα μήκη συμμετρικού λυγισμού διατομής στύλου με μεταβλητό εμβαδόν.



Σχ. 9(α). Δρόμοι ισορροπίας αντισυμμετρικού λυγισμού διατομής στύλου με μεταβλητό εμβαδόν.



Σχ. 9(β). Ισοδύναμα μήκη αντισυμμετρικού λυγισμού διατομής στύλου με μεταβλητό εμβαδόν.

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε η ευστάθεια δίστυλων πλαισίων με, ή χωρίς μετάθεση, με στύλους διατομής σταθερού ή μεταβλητού εμβαδού και μεταβλητής ροπής αδράνειας. Μετά την επίλυση των μη γραμμικών εξισώσεων λυγισμού ελήφθησαν τα κρίσιμα φορτία των πλαισίων καθώς επίσης και τα αντίστοιχα μήκη λυγισμού των στύλων.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται σε διαγράμματα για διάφορες τιμές του λόγου μηκών των στοιχείων l_2/l_1 και του λόγου ροπών αδράνειας I_m/I_2 (ροπή αδράνειας στο μέσον του στύλου / ροπή αδράνειας ζυγώματος) καθώς επίσης και του λόγου μεταβολής του στύλου $l_1' = l_1/a$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Dinnik A. N. "Design of columns of varying cross-section", Journal of Appl. Mech, ASME, 1932, p. 165
- [2] Gere J. M, Carter W.O. "Critical buckling loads for tapered columns", Journal of the Structural Division, ASCE ST1 88, 1962, pp 1-11
- [3] Ermopoulos J. "Buckling of tapered bars under stepped axial loads", J. of Structural Engineering , ASCE, Vol. 112, No. 6, pp. 1346-1354, 1986.
- [4] Ermopoulos J. "Buckling length of nonuniform members under stepped axial loads", International Journal of Computers and Structures , 73, pp. 573-582, 1999
- [5] Li Qiusheng, Cao Hong, Li Guiqing "Stability analysis of bars with varying cross-section", Int. Journals Solids Structures, Vol. 32, No. 21, 1995, pp. 3217-3228
- [6] Ermopoulos J. "Equivalent Buckling Length of Non-uniform Members", Journal Construction Steel Research, Vol. 42, No.2, 1995, pp. 141-158
- [7] Raftoyannis I., Ermopoulos J. Ch. "Stability of tapered and stepped steel columns with initial imperfections", Engineering Structures, Vol.27, 2005, pp. 1248-1257

BUCKLING ANALYSIS OF PORTAL FRAMES WITH COLUMNS OF VARYING CROSS-SECTIONS

Tasos Avraam

Lecturer Metal Structures Laboratory
National Technical University of Athens
Athens, Greece
e-mail: avraamt@central.ntua.gr

Zacharias Fasoulakis

Postgraduate student
National Technical University of Athens
Athens, Greece
e-mail: fasoulakis-z@hotmail.com

John Ermopoulos

Professor Metal Structures Laboratory
National Technical University of Athens
Athens, Greece
e-mail: jermop@central.ntua.gr

SUMMARY

The buckling of columns with varying cross-section is a problem that exists in many steel structures. Such columns are used to reduce the cost of a structure or for serviceability or architectural reasons. This problem is not treated by Eurocode EC3 where the former Annex E refers only to buckling of columns with constant cross-section.

In the present study we are looking for critical buckling loads as well as for equivalent buckling lengths of a rectangular (sway or non sway) metallic frame with tapered columns (columns with varying moment of inertia and constant or varying area). The examined frame is subject to vertical loads at its nodes. The use of differential equations of equilibrium and the related boundary and continuity conditions of the frame leads to the corresponding buckling equations. Critical buckling loads and equivalent buckling lengths can be calculated for several parameters (geometrical variation of columns' cross-sections, members' moment of inertia or lengths ratios etc.) for both cases of sway and non sway buckling. The results are presented via relative diagrams.