

# Ευστάθεια Πλαισίων Με Μέλη Μεταβλητής Διατομής Μέρος 1

**Ε. Κ. Λαζαρίδου**

Πολ. Μηχανικός, MSc, E.M.Π.  
Μεταπτυχική φοιτήτρια, EEDM, UCL,  
CEGE, Chadwick Building, Gower Street, WC1E 6BT  
London, UK  
e-mail: [eflazar@otenet.gr](mailto:eflazar@otenet.gr)  
email: [ucesela@live.ucl.ac.uk](mailto:ucesela@live.ucl.ac.uk)

**Ι. Χ. Ερμόπουλος**

Καθηγητής E.M.Π.  
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών  
Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 157 80  
Αθήνα, Ελλάδα  
e-mail: [jermop@central.ntua.gr](mailto:jermop@central.ntua.gr)

## 1. ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή μελετώνται έναντι ευστάθειας, αμφίπακτα ορθογωνικά πλαίσια τριών μελών μεταβλητής διατομής, τα οποία υπόκεινται σε αξονικά φορτία κατά τη διεύθυνση των αξόνων των υποστυλωμάτων τους και σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο στο ζύγωμά τους. Προκειμένου να διατυπωθεί μία γενική λύση, μορφώνεται ένα πλαίσιο όπου τα στοιχεία της διατομής του, της εξωτερικής φόρτισης και της εξωτερικής γεωμετρίας του εισάγονται μέσω αδιαστατοποιημένων συντελεστών. Η μελέτη γίνεται βάσει της Γραμμικής Θεωρίας Λυγισμού (Στατική 2<sup>ης</sup> τάξης) με τη Μέθοδο Γωνιών Στροφής, κατά την οποία λαμβάνεται υπόψη και η εσωτερική θλίψη που προκύπτει λόγω παραμόρφωσης στο ζύγωμα. Για το υπό μελέτη πλαίσιο, διατυπώνεται το μητρώο δυσκαμψίας του, και με τη βοήθεια HY υπολογίζεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Τέλος, μορφώνονται διαγράμματα του κρίσιμου φορτίου λυγισμού του πλαισίου για διάφορες τιμές των συντελεστών της εξωτερικής γεωμετρίας και της μεταβλητότητας των διατομών των ράβδων του, με τα οποία επιτυγχάνεται η άμεση εύρεση του φορτίου λυγισμού οποιουδήποτε πλαισίου, και η σύγκριση της αντοχής έναντι λυγισμού των διαφόρων πλαισίων.

## 2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι αστοχίες των συνήθων κατασκευών πολιτικού μηχανικού emίπτουν σε μία από δύο απλές κατηγορίες: (1) στην αστοχία υλικών και (2) στην έλλειψη ευστάθειας. Ο πρώτος τύπος αστοχίας, μπορεί συνήθως να προβλεφθεί επαρκώς, αναλύοντας τις εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής για την αρχική μη παραμορφωμένη κατάσταση αυτής είτε υπό στατική είτε υπό δυναμική φόρτιση είτε τέλος από συνδυασμό των δύο. Αντιθέτως, η πρόβλεψη της αστοχίας λόγω αστάθειας της κατασκευής απαιτεί τη διαμόρφωση εξισώσεων ισορροπίας ή κίνηματικών εξισώσεων στην παραμορφωμένη κατάσταση της

κατασκευής. Εφόσον η παραμορφωμένη αυτή κατάσταση δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή για μία κατασκευή, αλλά εξαρτάται από τις προς επίλυση παραμορφώσεις, το πρόβλημα που προκύπτει είναι μη γραμμικό.

Στην παρούσα εργασία μελετώνται έναντι ευστάθειας, αμφίπακτα ορθογωνικά πλαίσια τριών μελών, τα οποία υπόκεινται σε αξονικά φορτία στους δύο κόμβους κατά τη διεύθυνση των αξόνων των υποστυλωμάτων τους και σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο στο ζύγωμά τους. Τα υπό μελέτη πλαίσια αποτελούνται από τρεις ράβδους, τα δύο υποστυλώματα και το ζύγωμα, τα οποία είναι είτε μεταβλητής είτε σταθερής διατομής. Η μελέτη γίνεται βάσει της Γραμμικής Θεωρίας Λυγισμού (Στατική 2<sup>ης</sup> τάξης), κατά την οποία λαμβάνεται υπόψη και η εσωτερική θλίψη που προκύπτει λόγω της παραμόρφωσης στο ζύγωμα.

Οι υπό μελέτη ράβδοι μεταβλητής διατομής του πλασίου, αποτελούνται από δύο ή και περισσότερα επιμέρους τμήματα μεταβλητής ή σταθερής δυσκαμψίας. Τα τμήματα μεταβλητής δυσκαμψίας διέπονται από τον ακόλουθο νόμο μεταβολής: “η ροπή αδρανείας  $I_x$  σε τυχούσα θέση ενός μέλους (δοκού ή στύλου), μεταβάλλεται ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης της θέσης αυτής από την αρχή των αξόνων (που συμπίπτει με το σημείο τομής των αξόνων του άνω και κάτω πέλματος της διατομής)”. Ο νόμος αυτός αντιστοιχεί είτε σε σύνθετες (πολυμελείς) μεταλλικές διατομές (δικτυωτής ή πλαισιακής μορφής), με σταθερό εμβαδόν κατά μήκος του άξονά τους, όπου το υλικό είναι συγκεντρωμένο στις τέσσερις γωνίες (ή στα δύο πέλματα της διατομής), είτε, με ικανοποιητική ακρίβεια, σε μονομελείς διατομές (π.χ. διπλά ταυ), όπου η συμβολή του κορμού στη ροπή αδρανείας είναι κατά κανόνα μικρή. Η εκλογή του νόμου μεταβολής της ροπής αδρανείας βασίστηκε στο γεγονός ότι με αυτό το νόμο ικανοποιείται το μεγαλύτερο μέρος των συνήθως απαντούμενων στην πράξη περιπτώσεων μεταλλικών πλαισιωτών κατασκευών.

### 3. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Το πρόβλημα εύρεσης του φορτίου λυγισμού ενός ορθογωνικού πλαισίου, αλλά και μίας κατασκευής γενικότερα, συνίσταται σε δύο βήματα. Στο πρώτο μορφώνουμε την εξίσωση ισοροπίας του πλαισίου,  $[K]\{U\} = \{F\}$ , χρησιμοποιώντας κάποια από τις γνωστές μεθόδους της στατικής. Στο δεύτερο, ακολουθώντας συνήθως επαναληπτική διαδικασία, βρίσκουμε το φορτίο εκείνο για το οποίο η ορίζουσα του μητρώου δυσκαμψίας μηδενίζεται. Όταν η ορίζουσα του μητρώου δυσκαμψίας πλησιάζει το μηδέν, οι μετατοπίσεις απειρίζονται και οποιαδήποτε αύξηση του φορτίου, όσο μικρή και αν είναι αυτή, προκαλεί απείρως μεγάλες μετατοπίσεις. Αυτό, καταδεικνύει αστάθεια.

Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα υπολογιστεί με τη βοήθεια ενός ελαφρώς καμπτόμενου σχηματισμού του πλαισίου, ο οποίος συνίσταται σε πολύ μικρές στροφές  $\theta_B$  και  $\theta_C$  των κόμβων B και C αντίστοιχα, και στην οριζόντια μετάθεση  $\delta$  του ζυγώματος. Λόγω των παραμορφωσιακών αυτών μεγεθών, αναμένεται να αναπτυχθεί καμπτική παραμόρφωση στις τρεις ράβδους. Η ανάλυση γίνεται σύμφωνα με τη γραμμική θεωρία λυγισμού, όπου αγνοείται η βράχυνση του άξονα της θλιβόμενης ράβδου, και προσδιορίζουμε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θεωρώντας έργα από ροπές κάμψεως μόνο (λόγω εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων). Η επίλυση του πλαισίου γίνεται με τη μέθοδο μετατοπίσεων, και ειδικότερα, με τη μέθοδο γωνιών-στροφής με σύγχρονη επιρροή των αξονικών δυνάμεων στην κάμψη.

Στην περίπτωση όπου μελετάμε ένα ορθογωνικό πλαίσιο τριών μελών έναντι ευστάθειας λαμβάνοντας υπόψη την αξονική δύναμη του ζυγώματος, η σχέση του μητρώου

δυσκαμψίας και των αξονικών δυνάμεων των ράβδων είναι μη γραμμική. Για να υπολογίσουμε τότε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του πλαισίου ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία. Αρχικά επιλέγουμε μία μικρή εξωτερική φόρτιση, την οποία εισάγουμε αδιαστατοποιημένη στην εξίσωση ισορροπίας του πλαισίου, η οποία έχει προκύψει από απλή στατική ανάλυση. Υπολογίζουμε έπειτα το μητρώο μετατοπίσεων του πλαισίου. Έχοντας επιλύσει το πλαίσιο για την φόρτιση αυτή, υπολογίζουμε τις αξονικές δυνάμεις που καταπονούν τα μέλη του πλαισίου τόσο λόγω της εξωτερικής φόρτισης όσο και λόγω των παραμορφώσεων και τις αδιαστατοποιούμε. Με τη μέθοδο γωνιών στροφής μορφώνουμε την εξίσωση ισορροπίας του πλαισίου εκ νέου λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω αξονικές δυνάμεις των μελών. Έχουμε καταλήξει σε ένα μητρώο δυσκαμψίας στο οποίο λαμβάνεται υπόψη η επιρροή των αξονικών δυνάμεων των ράβδων, όπου για να το μορφώσουμε όμως έχουμε χρησιμοποιήσει τις αξονικές δυνάμεις των ράβδων από απλή στατική ανάλυση. Πρέπει να κάνουμε σύγκλιση του μητρώου δυσκαμψίας της στατικής 2<sup>ης</sup> τάξης έτσι ώστε αυτό να ανταποκρίνεται στη σχέση ισορροπίας του πλαισίου. Αφού έχουμε επιτύχει τη σύγκλιση του μητρώου δυσκαμψίας εξετάζουμε εάν η ορίζουσά του μηδενίζεται. Εάν ναι, το πλαίσιο είναι ασταθές και άρα έχουμε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Εάν όχι, αυξάνουμε την εξωτερική φόρτιση και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία έως ότου η ορίζουσα του μητρώου δυσκαμψίας μηδενιστεί. Παρακάτω δίνονται οι σχέσεις που εξήχθησαν κατά τα παραπάνω βήματα υπολογισμού, για ένα πλαίσιο τριών μελών, η γεωμετρία, τα αδρανειακά χαρακτηριστικά και η εξωτερική φόρτιση του οποίου εισάγονται αδιαστατοποιημένα με τη βοήθεια συντελεστών.

#### **4. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΚΑΙ ΜΕΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ**

Το υπό μελέτη πλαίσιο ABCD, ύψους  $H$  και μήκους ζυγώματος  $L$ , αποτελείται από τρία μέλη, τις ράβδους 1, 2 και 3, οι οποίες έχουν μεταβλητή ροπή αδρανείας, και υπόκειται στη φόρτιση που φαίνεται στο Σχήμα 1. Επιλέγουμε για κάθε μέλος σύστημα ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων και καθορίζουμε έτσι τις φορές των εντατικών μεγεθών και των μεγεθών μετατοπίσεως. Προκειμένου για την επίλυση του προβλήματος, εισάγουμε συντελεστές, που καθορίζουν τη γεωμετρία του πλαισίου και τα αδρανειακά χαρακτηριστικά αυτού.

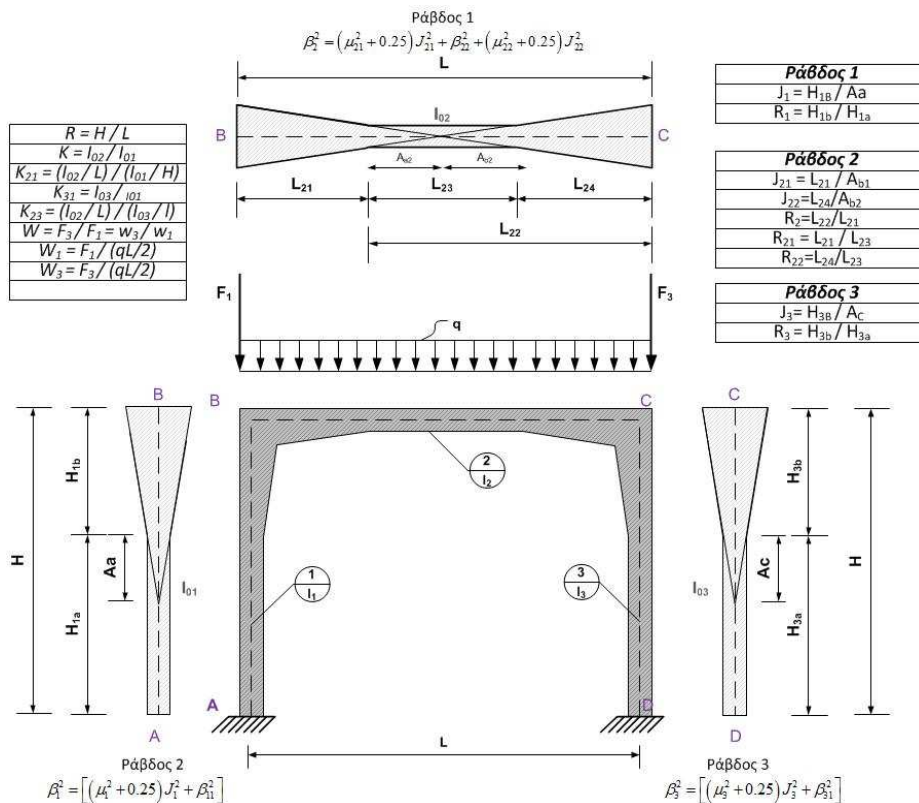
Στα μέλη μεταβλητής διατομής του πλαισίου θεωρείται ότι ο άξονας παραμένει ευθύγραμμος κατά το μήκος της διατομής, δεν λαμβάνεται δηλαδή υπ'όψη η εκκεντρότητα κατά την εισαγωγή των αξονικών φορτίων. Η επιρροή της εκκεντρότητας αυτής μελετάται στο δεύτερο Μέρος της παρούσας εργασίας.

Στο Σχ. 1 φαίνονται τόσο οι συντελεστές που καθορίζουν τη γεωμετρία και τα αδρανειακά χαρακτηριστικά του πλαισίου όσο και οι συντελεστές που περιγράφουν τη μεταβλητότητα και τη γεωμετρία των μεταβλητών μελών του πλαισίου. Τέλος το αδιάστατο αξονικό φορτίο κάθε μέλους καθώς και οι συντελεστές της μεθόδου γωνιών στροφής που χρησιμοποιούνται στην εργασία αυτή λαμβάνονται από τη βιβλιογραφία [3,4,5].

#### **5. ΣΤΑΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ**

Κατά την επίλυση αυτή, με τη μέθοδο γωνιών στροφής χωρίς τη σύγχρονη επιρροή αξονικών δυνάμεων (αδιάστατο αξονικό φορτίο μηδενικό), μορφώνουμε την εξίσωση ισορροπίας του πλαισίου, υπολογίζουμε τις παραμορφώσεις του πλαισίου και από αυτές εξάγουμε τις αξονικές δυνάμεις που καταπονούν τα μέλη του πλαισίου. Στο Σχήμα 2

δίνεται η σήμανση των θετικών φορών των ροπών και τεμνουσών σύμφωνα με τη μέθοδο γωνιών στροφής.



Σχ. 1- Συντελεστές γεωμετρίας πλαισίου, αδιάστατοι συντελεστές μελών μεταβλητής διατομής πλαισίου, αδιάστατα αξονικά φορτία μελών πλαισίου.

Από την ισορροπία των κόμβων B, C και την ισορροπία του ζυγώματος BC, μετά από πράξεις και αντικατάστασεις με τα κατάλληλα αδιάστατα μεγέθη όπως αυτά δόθηκαν παραπάνω, καταλήγουμε στην εξίσωση ισορροπίας του πλαισίου  $[K]\{U\} = \{F\}$ , με:

$$[K] = \begin{bmatrix} g_{21} + k_{21}u_{12} & k_{21}u_{22} & g_{11} + g_{21} \\ k_{21}g_{12} & k_{21}g_{22} + k_{31}g_{23} & k_{31}(g_{13} + g_{23}) \\ u_{21} + g_{21} & k_{31}(u_{23} + g_{23}) & k_{31} \left( \begin{matrix} u_{13} + u_{23} \\ g_{13} + g_{23} \end{matrix} \right) + \left( \begin{matrix} u_{11} + u_{21} \\ +g_{11} + g_{21} \end{matrix} \right) \end{bmatrix} \quad (1)$$

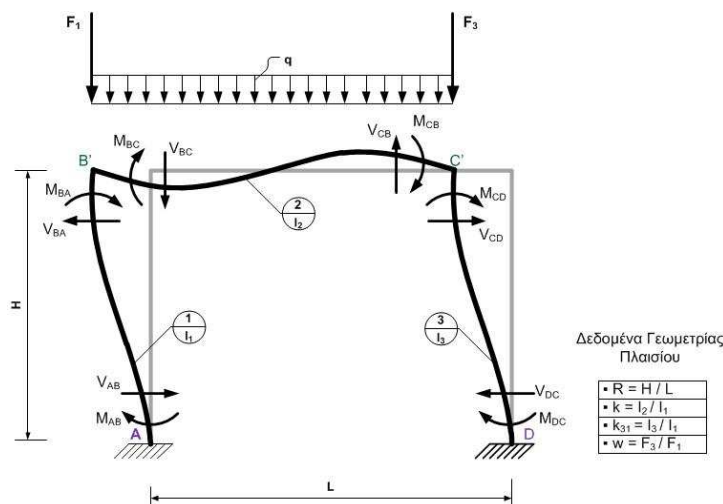
$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \frac{\delta}{H} \end{Bmatrix}, \quad \{F\} = qL^2 \frac{H}{2EI_{01}} \begin{Bmatrix} -GG_B \\ -GG_C \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Οι αξονικές δυνάμεις των ράβδων εκφράζονται αδιαστατοποιημένες για να χρησιμοποιηθούν κατά την επίλυση του πλαισίου με στατική 2<sup>ης</sup> τάξης. Βάσει αυτών μορφώνουμε το μητρώο δυσκαμψίας στο πρώτο βήμα της επαναληπτικής διαδικασίας, με:

$$P_1 = F_1 + q \frac{L}{2} - \left\{ \frac{2EI_{02}}{H^2} RK_{21} [(u_{12} + g_{12})\theta_B + (u_{22} + g_{22})\theta_C] \right\} \quad (3)$$

$$P_2 = \frac{2EI_{01}}{H^2} \left[ (u_{21} + g_{21})\theta_B + (u_{11} + u_{21} + g_{11} + g_{21}) \frac{\delta}{H} \right] \quad (4)$$

$$P_3 = F_3 + q \frac{L}{2} + \left\{ \frac{2EI_{01}}{H^2} RK_{21} [(u_{12} + g_{12})\theta_B + (u_{22} + g_{22})\theta_C] \right\} \quad (5)$$



Σχ. 2- Παραμορφωμένη γεωμετρία πλαισίου

$$\beta_1^2 = \beta_{01}^2 - 2RK_{21}[(u_{12} + g_{12})\theta_B + (u_{22} + g_{22})\theta_C] \quad (6)$$

$$\beta_2^2 = \left\{ [(u_{21} + g_{21})\theta_B + (u_{11} + u_{21} + g_{11} + g_{21})\frac{\delta}{H}] \right\} / (k_{21}R) \quad (7)$$

$$\beta_3^2 = \{w\beta_{01A}^2 + \beta_{01B}^2 + 2RK_{21}[(u_{12} + g_{12})\theta_B + (u_{22} + g_{22})\theta_C]\} / k_{31} \quad (8)$$

## 6. ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΛΥΓΙΣΜΟΥ

Στο βήμα αυτό γνωρίζουμε τα αδιάστατα αξονικά φορτία των ράβδων και άρα από αυτά μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές της μεθόδου γωνιών στροφής των μελών του πλαισίου λαμβάνοντας υπ' όψη τις αξονικές δυνάμεις των ράβδων. Μορφώνουμε έτσι την εξίσωση ισορροπίας του πλαισίου,  $[K]\{U\} = \{F\}$ , όπου το εξωτερικό φορτίο παραμένει το ίδιο με αυτό της στατικής επίλυσης.

$$[K] = \begin{bmatrix} g_{21} + k_{21}u_{12} & k_{21}u_{22} & g_{11} + g_{21} \\ k_{21}g_{12} & k_{21}g_{22} + k_{31}g_{23} & k_{31}(g_{13} + g_{23}) \\ u_{21} + g_{21} & k_{31}(u_{23} + g_{23}) & k_{31}\left(\frac{u_{13} + u_{23}}{g_{13} + g_{23}}\right) + (u_{11} + u_{21}) + (g_{11} + g_{21}) - \frac{(\beta_1^2 + k_{31}\beta_3^2)}{2} \end{bmatrix}$$

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \frac{\delta}{H} \end{Bmatrix}, \quad \{F\} = qL^2 \frac{H}{2EI_{02}} \begin{Bmatrix} -GG_B \\ -GG_C \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Οι αξονικές δυνάμεις (εσωτερικές) των ράβδων βάσει της παραπάνω επίλυσης δίνονται για τις ράβδους 1 και 3 από τις σχέσεις 6,8 και για τη ράβδο 2 από την παρακάτω σχέση:

$$\beta_2^2 = \left\{ [(u_{21} + g_{21})\theta_B + (u_{11} + u_{21} + g_{11} + g_{21})\frac{\delta}{H}] - \beta_1^2 \right\} / (k_{21}R) \quad (11)$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι αυτές που χρησιμοποιούνται κατά τον υπολογισμό του κρισίμου φορτίου λυγισμού του πλαισίου. Όταν επιτύχουμε σύγκλιση των δύο παραπάνω

μητρώων δυσκαμψίας προχωράμε στην εύρεση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού του πλαισίου.

## 7. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

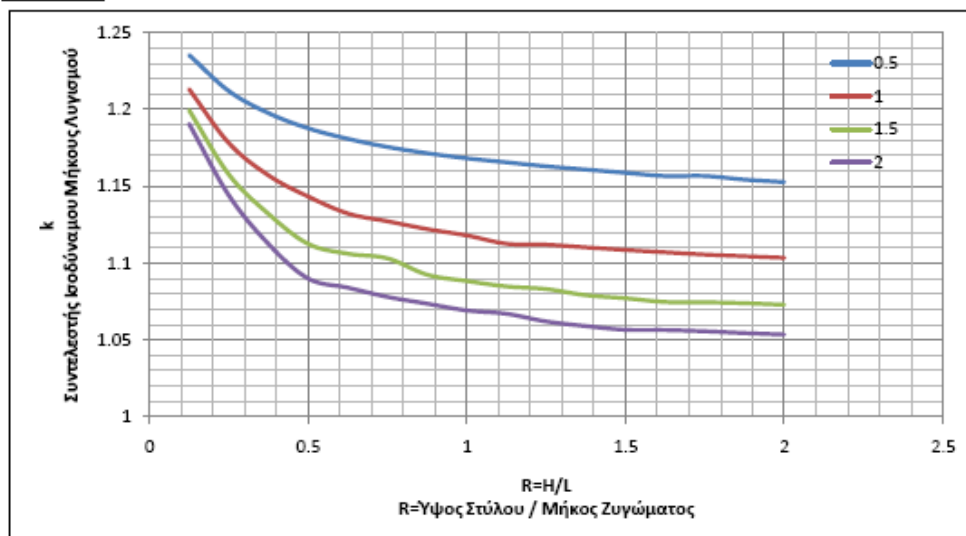
Η εύρεση του φορτίου λυγισμού του πλαισίου με μέλη μεταβλητής διατομής, σύγχρονη επιρροή αξονικών δυνάμεων και επιρροή της θλίψης του ζυγώματος λόγω εγκάρσιου ομοιόμορφου κατανεμημένου φορτίου στο ζύγωμα, είναι μία χρονοβόρα διαδικασία, όχι μόνο επειδή απαιτούνται πολλά βήματα υπολογισμού μέχρι το φορτίο να φτάσει την οριακή τιμή, αλλά και επειδή σε κάθε βήμα αύξησης του φορτίου είναι μεγάλος ο όγκος των υπολογισμών που πρέπει να λάβουν χώρα για την επίλυση της εξίσωσης ισορροπίας του πλαισίου.

Προκειμένου να γίνει εφικτή η παραμετρική επίλυση, συντάσσουμε πρόγραμμα στον ηλεκτρονικό υπολογιστή. Στο πρόγραμμα εισάγουμε αδιαστατοποιημένα τα γεωμετρικά δεδομένα του πλαισίου και των μελών μεταβλητής διατομής αυτού, καθώς και μια αρχική εξωτερική φόρτιση. Το πρόγραμμα εξάγει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού για τα δεδομένα που δώσαμε. Στον αλγόριθμο αυτό έχουμε τη δυνατότητα να αυξάνουμε είτε την εξωτερική αξονική δύναμη στα υποστυλώματα μόνο, είτε το ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο στο ζύγωμα μόνο είτε και τα δύο ταυτόχρονα. Μπορούμε δηλαδή να υπολογίσουμε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του πλαισίου για οποιαδήποτε εξωτερική φόρτιση.

Παρακάτω δίδονται ενδεικτικά διαγράμματα κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Στο Σχήμα 3 δίνονται τα κρίσιμα φορτία λυγισμού του πλαισίου για διάφορες τιμές της εξωτερικής γεωμετρίας του πλαισίου, κρατώντας σταθερές τις διατομές των μελών, ενώ στο Σχήμα 4 κρατάμε σταθερά τα πάντα εκτός από τη γεωμετρία και τα αδρανειακά χαρακτηριστικά της ράβδου του ζυγώματος.

R	K	$k_{31}$	w	$R_1$	$J_1$	$R_3$	$J_3$
1.00	1.00	1.00	1.00	0.30	1.00	0.50	1.00

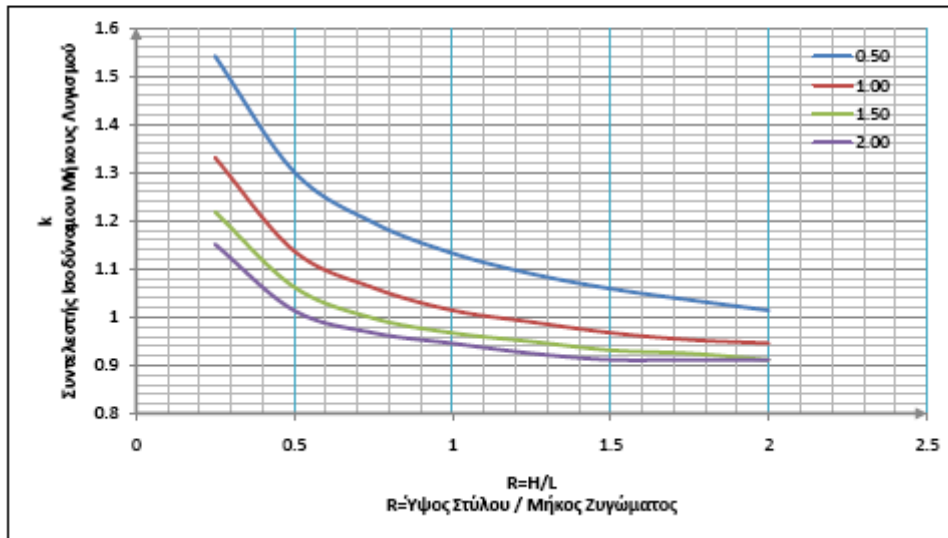
$J_{21}$ $R_{22}$	0.250	0.500	0.750	1.000	1.250	1.500	1.750	2.000
0.50	1.212	1.188	1.176	1.168	1.163	1.159	1.157	1.153
1.00	1.178	1.143	1.127	1.118	1.112	1.108	1.105	1.103
1.50	1.158	1.112	1.103	1.088	1.083	1.077	1.074	1.073
2.00	1.144	1.090	1.078	1.069	1.062	1.057	1.056	1.053



Σχ. 3- Συντελεστές ισοδύναμου μήκους λυγισμού για διαφορετικές μεταβλητότητες μελών πλαισίου.

$k_{31}$	w	$R_1$	$J_1$	$R_3$	$J_3$	$R_{21}$	$J_{21}$	$R_{22}$	$J_{22}$
1.00	1.00	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50

$K \backslash R$	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
0.50	1.541669	1.301707	1.196214	1.132765	1.090087	1.05921	1.035797	1.01411
1.00	1.331399	1.137481	1.060974	1.01411	0.989707	0.967427	0.952804	0.945656
1.50	1.218933	1.062941	0.998058	0.967427	0.949552	0.931677	0.92484	0.911464
2.00	1.15174	1.01411	0.967427	0.945656	0.92484	0.911464	0.911464	0.911464



Σχ.4 Συντελεστές ισοδύναμου μήκους λυγισμού για διάφορες γεωμετρίες πλαισίου.

## 8. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Ermopoulos J., *Slope-Deflection method and bending of tapered bars under stepped loads*, J. of Constr. Steel Research, 11, 1988, pp. 121-141.
2. Ι.Χ.Ερμόπουλος, *Μέθοδος Γωνιών-Στροφής και Θεμελιώδεις Ροπές σε Θλιβόμενες Ράβδους Μεταβλητής Διατομής*, Τεχν. Χρον.Επιστ. Εκδ. ΤΕΕ, Ι, τεύχος 3 1996.
3. Ε.Κ.Λαζαρίδου, Ι.Χ.Ερμόπουλος, *Θλιβόμενες Δοκοί Μεταβλητής Διατομής Μέρος 1: Μέθοδος Γωνιών-Στροφής*, Πρακτικά 6<sup>ου</sup> Εθνικού Συνεδρίου Μεταλλικών Κατασκευών, Ιωάννινα 2008.
4. Ε.Κ.Λαζαρίδου, Ι.Χ.Ερμόπουλος, *Θλιβόμενες Δοκοί Μεταβλητής Διατομής Μέρος 2: Θεμελιώδεις Ροπές*, Πρακτικά 6<sup>ου</sup> Εθνικού Συνεδρίου Μεταλλικών Κατασκευών, Ιωάννινα 2008.
5. Ε.Κ.Λαζαρίδου, Ι.Χ.Ερμόπουλος, *Θλιβόμενες Δοκοί Μεταβλητής Διατομής Μέρος 3: Κρίσιμα φορτία και ισοδύναμα μήκη λυγισμού*, Πρακτικά 6<sup>ου</sup> Εθνικού Συνεδρίου Μεταλλικών Κατασκευών, Ιωάννινα 2008.

**Stability of frames with members of tapered cross sections  
Part 1**

**E. K. Lazaridou**

Civil Engineer, MSc NTUA  
Postgraduate student , EEDM, UCL,  
CEGE, Chadwick Building, Gower Street, WC1E 6BT  
London, UK  
e-mail: [eflazar@otenet.gr](mailto:eflazar@otenet.gr)  
email: [ucesela@live.ucl.ac.uk](mailto:ucesela@live.ucl.ac.uk)

**J. Ch. Ermopoulos**

Professor N.T. University of Athens  
School of Civil Engineering, Laboratory of Metal Structures  
9 Iroon Politechneiou str., 157 80  
Athens, Greece  
e-mail: [jermop@central.ntua.gr](mailto:jermop@central.ntua.gr)

**SUMMARY**

In this paper, the equilibrium of frames consisting of tapered members is studied. The frame is subjected to axial compressive loads in the direction of the columns and to uniform distributed load on the beam. In order to form a general solution to the equilibrium problem the frame under considerations is designed parametrically and analysed with the slope deflection method taking into consideration the compressive stress due to the deformation of the beam. Using iteration procedure the convergent stiffness matrix of the frame is formed and the critical loads are then calculated. The results are presented in graphical form and the critical buckling loads of frames of varying geometry and loading are compared.