

ΚΑΜΠΤΙΚΟΣ ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΑΤΕΛΩΝ ΔΟΚΩΝ ΜΕ ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΥΣ ΣΥΝΔΕΣΜΟΥΣ

Κωνσταντίνος Τζάρος

Δρ. Πολιτικός Μηχανικός

Εργαστήριο Ανάλυσης και Σχεδιασμού Κατασκευών, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Βόλος, Ελλάδα

e-mail: ktzaros@civ.uth.gr

Ευριπίδης Μυστακίδης

Αναπληρωτής Καθηγητής

Εργαστήριο Ανάλυσης και Σχεδιασμού Κατασκευών, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Βόλος, Ελλάδα

e-mail: emistaki@uth.gr

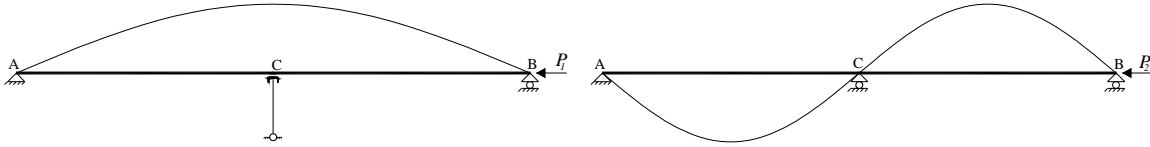
1. ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία μελετάται με αναλυτικό τρόπο το πρόβλημα του καμπτικού λυγισμού γεωμετρικά ατελών δοκών παρουσία μονόπλευρων συνδέσμων στήριξης με στόχο την εύρεση του φορτίου αστάθειας και της καμπτικής μορφής λυγισμού. Η μόρφωση και επίλυση του μαθηματικού προβλήματος επιτυγχάνεται στα πλαίσια της θεωρίας της γραμμικής ελαστικής ευστάθειας, μέσω εφαρμογής αρχών της ανισοτικής μηχανικής και θεμελιωδών θεωρημάτων που διέπουν την λύση προβλημάτων συνοριακών τιμών συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Στο άρθρο μελετάται η περίπτωση δοκών με δύο μονόπλευρους συνδέσμους σε αντίθετη λειτουργία. Η παρουσίαση της αναλυτικής επίλυσης ενός ιδιαίτερου παραδείγματος αναδεικνύει την πολυπλοκότητα του προβλήματος και τη χρησιμότητα της αναλυτικής μεθόδου. Η προτεινόμενη μεθοδολογία δύναται να επεκταθεί σε δοκούς με περισσότερους συνδέσμους και κατόπιν να εφαρμοστεί σε πλήθος πρακτικών εφαρμογών, των οποίων η μηχανική συμπεριφορά μπορεί να προσομοιωθεί από συστήματα δοκών με μονόπλευρους συνδέσμους.

2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το πρόβλημα του λυγισμού δοκών με μονόπλευρους συνδέσμους παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον διότι δύναται να ενεργοποιηθούν μορφές λυγισμού που δεν θα μπορούσαν να αναπτυχθούν στην περίπτωση του λυγισμού φορέων με αμφίπλευρους συνδέσμους. Ενδεικτικά παρουσιάζεται η κρίσιμη μορφή λυγισμού του απλού φορέα του Σχήματος 1α σε σχέση με την κρίσιμη μορφή λυγισμού που θα αναπτύσσονταν στον ίδιο φορέα αν στην θέση του αμφίπλευρου συνδέσμου βρισκόταν ένας μονόπλευρος σύνδεσμος (Σχήμα 1β). Η ιδιαιτερότητα αυτή αποκτά μεγαλύτερη σημασία στην περίπτωση όπου σε μία δοκό

ενεργούν περισσότεροι του ενός μονόπλευροι σύνδεσμοι που ενεργοποιούνται για την ίδια ή και διαφορετική κατεύθυνση. Ανάλογα επομένως με την περίπτωση, το φαινόμενο του λυγισμού δοκών με μονόπλευρους συνδέσμους μπορεί να οδηγήσει σε μεγαλύτερα ή και σε μικρότερα φορτία λυγισμού σε σχέση πάντοτε με την περίπτωση του κλασικού λυγισμού δοκών με αμφίπλευρους συνδέσμους.



Σχ.1: Κρίσιμη μορφή λυγισμού φορέα α) με ενδιάμεσο μονόπλευρο σύνδεσμο β) με ενδιάμεσο αμφίπλευρο σύνδεσμο ($P_1 < P_2$).

Ο λυγισμός του Σχήματος 1 αφορά γεωμετρικά τέλειες δοκούς, δηλαδή δοκούς χωρίς την παρουσία αρχικών γεωμετρικών ατελειών. Με δεδομένο ότι η πλειονότητα των φορέων στη φύση εμφανίζουν αρχικές γεωμετρικές ατέλειες ως αποτέλεσμα της διαδικασίας κατασκευής τους, τοποθέτησης τους στο έργο κτλ., στα πλαίσια της παρούσας εργασίας μελετώνται δοκοί με τυχαίο αρχικό γεωμετρικά ατελές σχήμα. Η εύρεση του φορτίου αστάθειας σε γεωμετρικά ατελείς δοκούς με μονόπλευρους συνδέσμους αποτελεί ένα κατεξοχήν μη γραμμικό πρόβλημα λόγω συνύπαρξης φαινομένων γεωμετρικής μη γραμμικότητας και συνθηκών επαφής.

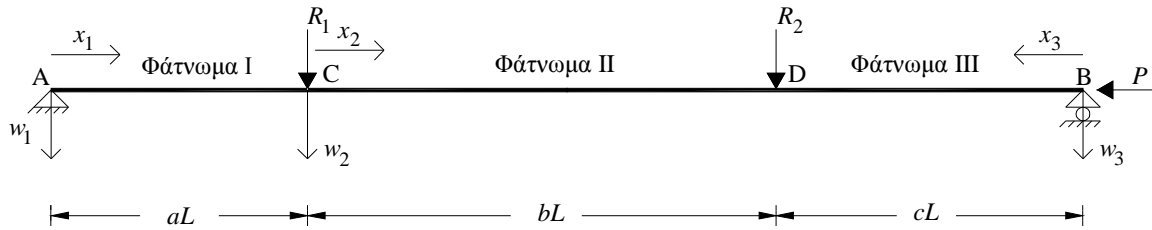
Η μαθηματική μόρφωση του ανωτέρου προβλήματος στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας της ελαστικής ευστάθειας [1],[2], αντιστοιχεί στην μόρφωση ενός προβλήματος συνοριακών τιμών (Boundary Value Problem-BVP) συνήθων διαφορικών εξισώσεων 4^{ης} τάξης με ανισοτικούς περιορισμούς [3]. Οι περιορισμοί εισάγονται από την λειτουργία των συνδέσμων και θα πρέπει να ικανοποιούνται για κάθε τιμή του φορτίου. Στην περίπτωση του προβλήματος του λυγισμού δοκών με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες, το παραπάνω ανισοτικό πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι μη ομογενές (non-homogeneous BVP). Η επίλυση των μη ομογενών προβλημάτων βασίζεται στην εφαρμογή ενός θεμελιώδους θεωρήματος που σχετίζεται με την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης και το οποίο χρησιμοποιεί τις λύσεις των αντίστοιχων κάθε φορά ομογενών προβλημάτων συνοριακών τιμών (homogeneous BVPs). Για το λόγο αυτό, αρχικά επιλύεται το ομογενές πρόβλημα συνοριακών τιμών με περιορισμούς [4].

Στην παρούσα εργασία και χωρίς περιορισμό της γενικότητας, παρουσιάζεται μεθοδολογία εύρεσης του φορτίου αστάθειας γεωμετρικά ατελών δοκών με δύο μονόπλευρους συνδέσμους σε αντίθετη λειτουργία. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται το απαιτούμενο θεωρητικό πλαίσιο, οι εξισώσεις που διέπουν την μόρφωση του προβλήματος σε συνδυασμό με τους εισαγόμενους ανισοτικούς περιορισμούς, καθώς και η μεθοδολογία επίλυσης του μαθηματικού προβλήματος. Οι αναλυτικές εκφράσεις των παραγόμενων λύσεων δεν παρουσιάζονται στο παρόν άρθρο για λόγους οικονομίας του κειμένου, αλλά είναι διαθέσιμες στο [4].

Εν συνεχεία, η χρήση ενός ευέλικτου αλγορίθμου για τον προσδιορισμό του φορτίου αστάθειας παρέχει αναλυτικές λύσεις σε δυσεπίλυτα προβλήματα με τυχαίες αρχικές γεωμετρικές ατέλειες, αυθαίρετη θέση των μονόπλευρων συνδέσμων και οποιοσδήποτε αρχικές συνθήκες επαφής. Η χρήση του αλγορίθμου καθώς και τα πλεονεκτήματα της προτεινόμενης μεθόδου αναδεικνύονται από την παρουσίαση ενός ενδεικτικού παραδείγματος.

3. ΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΑΝΙΣΟΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Έστω η δοκός του Σχήματος 2 μήκους L . Η δοκός χωρίζεται σε τρία άνισα ανοίγματα από δύο μονόπλευρους συνδέσμους που τοποθετούνται σε τυχαία σημεία της δοκού και εμφανίζουν αντίθετη λειτουργία. Η συγκεκριμένη δοκός θεωρείται γεωμετρικά ατελής και καταπονείται από αξονικό θλιπτικό φορτίο.



Σχ.2: Γεωμετρικά ατελής δοκός με δύο ενδιάμεσους μονόπλευρους συνδέσμους σε αντίθετη λειτουργία υπό αξονική θλίψη.

Το γεωμετρικά ατελές σχήμα της δοκού δύναται να περιγραφεί από μία ημιτονική σειρά Fourier σύμφωνα με την παρακάτω συνάρτηση στην οποία με g_r συμβολίζονται οι συντελεστές Fourier:

$$w_0(x) = \sum_{r=1}^n g_r \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right), \quad x \in [0, L]. \quad (1)$$

Σημειώνεται ότι η συνάρτηση της αρχικής ατέλειας θα πρέπει να είναι συμβατή με τη λειτουργία των μονόπλευρων συνδέσμων. Η απαίτηση αυτή οδηγεί σε ημιτονικές σειρές Fourier των οποίων οι συντελεστές Fourier θα πρέπει να ικανοποιούν συγκεκριμένους ανισοτικούς περιορισμούς [4]. Τότε, εφαρμόζοντας την μέθοδο ισορροπίας του Euler στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας της ελαστικής ευστάθειας για τον γεωμετρικά ατελή φορέα του Σχήματος 2, μορφώνονται οι παρακάτω μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις 4^{ης} τάξης:

$$\frac{d^4 w_1(x_1)}{dx_1^4} + k^2 \frac{d^2 w_1(x_1)}{dx_1^2} = \sum_{r=1}^n g_r \left(\frac{r\pi}{L}\right)^4 \sin\left(\frac{r\pi x_1}{L}\right), \quad x_1 \in [0, aL] \quad (2)$$

$$\frac{d^4 w_2(x_2)}{dx_2^4} + k^2 \frac{d^2 w_2(x_2)}{dx_2^2} = \sum_{r=1}^n g_r \left(\frac{r\pi}{L}\right)^4 \sin\left(\frac{r\pi(x_2 + aL)}{L}\right), \quad x_2 \in [0, bL] \quad (3)$$

$$\frac{d^4 w_3(x_3)}{dx_3^4} + k^2 \frac{d^2 w_3(x_3)}{dx_3^2} = -\sum_{r=1}^n g_r \left(\frac{r\pi}{L}\right)^4 \sin\left(\frac{r\pi x_3}{L}\right) (-1)^r, \quad x_3 \in [0, cL]. \quad (4)$$

Στις ανωτέρω εξισώσεις οι συνάρτησεις w_1, w_2, w_3 αποτελούν τις υποσυναρτήσεις της συνολικής ελαστικής γραμμής του φορέα με κλάδους συνάρτησης $w(x)$. Στις παραπάνω σχέσεις $k = \sqrt{P/EI}$, όπου P το επιβαλλόμενο αξονικό θλιπτικό φορτίο και EI η καμπτική δυσκαμψία του φορέα.

Οι ανωτέρω διαφορικές εξισώσεις σε συνδυασμό με τις συνοριακές και ανισοτικές συνθήκες του προβλήματος συγκροτούν ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών με ανισοτικούς περιορισμούς που διέπει την ισορροπία της δοκού και του οποίου η λύση δίνει την συνάρτηση της ελαστικής γραμμής του φορέα ως συνάρτηση της θέσης κατά μήκος του άξονα της δοκού και του επιβαλλόμενου αξονικού φορτίου. Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος αφορούν μια σειρά από εξισώσεις που σχετίζονται με τις κινηματικές και

φυσικές συνθήκες του προβλήματος και οι οποίες εμπεριέχουν τη ζητούμενη συνάρτηση μετατόπισης και τις μέχρι τρίτης τάξης παραγώγους της [4]. Επιπρόσθετα, οι ανισοτικοί περιορισμοί και οι συνθήκες συμπληρωματικότητας (ισοτικοί περιορισμοί) τους οποίους θα πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση της μετατόπισης για κάθε τιμή του επιβαλλόμενου θλιπτικού φορτίου, είναι απόρροια της λειτουργίας των μονόπλευρων συνδέσμων και έχουν την μορφή του Πιν. 1.

Σύνδεσμος στο C	Σύνδεσμος στο D
$w_1(aL) = w_2(0) = u_1 \geq 0$	$w_2(bL) = w_3(cL) = u_2 \leq 0$
$R_1 \geq 0$	$R_2 \leq 0$
$R_1 \cdot u_1 = 0$	$R_2 \cdot u_2 = 0$

Πίν. 1. Ανισοτικοί περιορισμοί και συνθήκες συμπληρωματικότητας των μονόπλευρων συνδέσμων [4].

Σύμφωνα με τον Πιν. 1 ο μονόπλευρος σύνδεσμος στο σημείο C δεν επιτρέπει την κατακόρυφη προς τα άνω μετατόπιση του σημείου (αρνητική μετακίνηση) στο οποίο εφαρμόζεται, αναπτύσσοντας και μεταβιβάζοντας έτσι την άγνωστη αντίδραση R_1 . Παράλληλα, η ανάπτυξη θετικής κατακόρυφης μετακίνησης (προς τα κάτω) στο σημείο C γίνεται ανεμπόδιστα. Κατ' αντιστοιχία, ο μονόπλευρος σύνδεσμος στο σημείο D δεν επιτρέπει την ανάπτυξη θετικής μετακίνησης, ενεργοποιώντας με αυτό τον τρόπο την άγνωστη αντίδραση R_2 . Επιπρόσθετα, το σημείο D δύναται να αναπτύξει αρνητική (προς τα άνω) μετακίνηση.

4. ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΑΝΙΣΟΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Για τη διευκόλυνση της επίλυσης του προβλήματος συνοριακών τιμών με τους ανισοτικούς περιορισμούς της προηγούμενης παραγράφου, προτείνεται μια διαδικασία επίλυσης που βασίζεται στη διάσπαση του αρχικού ανισοτικού προβλήματος σε επιμέρους υποπροβλήματα συνοριακών τιμών, τα οποία διατηρούν μεν τον ανισοτικό χαρακτήρα των περιορισμών αλλά παράλληλα διασφαλίζεται η αναλυτική τους επίλυση [4]. Η διάσπαση αυτή βασίζεται στις διαφορετικές συνθήκες επαφής που δύναται να εμφανιστούν κατά την διάρκεια της κάμψης. Συγκεκριμένα, στο υπο μελέτη πρόβλημα δύναται να εμφανιστούν εννέα διαφορετικές συνθήκες επαφής ανάλογα με το εάν ο μονόπλευρος σύνδεσμος είναι ενεργός (E), ανενεργός (A) ή βρίσκεται σε ουδέτερη κατάσταση επαφής (O) (δηλ. ο σύνδεσμος βρίσκεται οριακά σε επαφή με τη δοκό χωρίς να αναπτύσσεται αντίδραση).

Με βάση επομένως τις διαφορετικές καταστάσεις επαφής που δύναται να εμφανιστούν, το αρχικό πρόβλημα συνοριακών τιμών που υπόκειται στους ανισοτικούς περιορισμούς και τις συνθήκες συμπληρωματικότητας του Πιν. 1, μετασχηματίζεται σε μια σειρά απο επιμέρους προβλήματα συνοριακών τιμών στα οποία οι περιορισμοί αποτελούν κατ' ουσίαν ένα δυνατό συνδυασμό (ανά δύο) μεταξύ των περιορισμών που δίνονται στον Πιν. 1. Τα προκύπτοντα μη ομογενή υποπροβλήματα συνοριακών τιμών διέπονται απο τις ίδιες εξισώσεις (2),(3),(4) των οποίων οι λύσεις θα πρέπει να ικανοποιούν τις ίδιες συνοριακές συνθήκες όπως αυτές αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο.

Με δεδομένο ότι τα ανωτέρω υποπροβλήματα αποτελούν μη ομογενή προβλήματα συνοριακών τιμών, η ύπαρξη και το είδος της λύσης σχετίζεται άμεσα με τις λύσεις των

αντίστοιχων ομογενών προβλημάτων συνοριακών τιμών με περιορισμούς, ήτοι με τις λύσεις των προβλημάτων λυγισμού των αντίστοιχων γεωμετρικά τέλειων φορέων [5]. Επιπρόσθετες πληροφορίες για την επίλυση αυτού του είδους των προβλημάτων δύναται να βρεθούν στο [4]. Τότε, γνωρίζοντας τις λύσεις των εκάστοτε ομογενών ιδιοπροβλημάτων, η λύση των μη ομογενών βασίζεται σε θεμελιώδες θεώρημα των μαθηματικών σύμφωνα με το οποίο απαιτείται διερεύνηση που σχετίζεται με την τιμή του επιβαλλόμενου αξονικού θλιπτικού φορτίου [5]. Συγκεκριμένα, ελέγχεται εάν η τιμή του αξονικού φορτίου P , αποτελεί ιδιοτιμή του αντίστοιχου ομογενούς υποπροβλήματος:

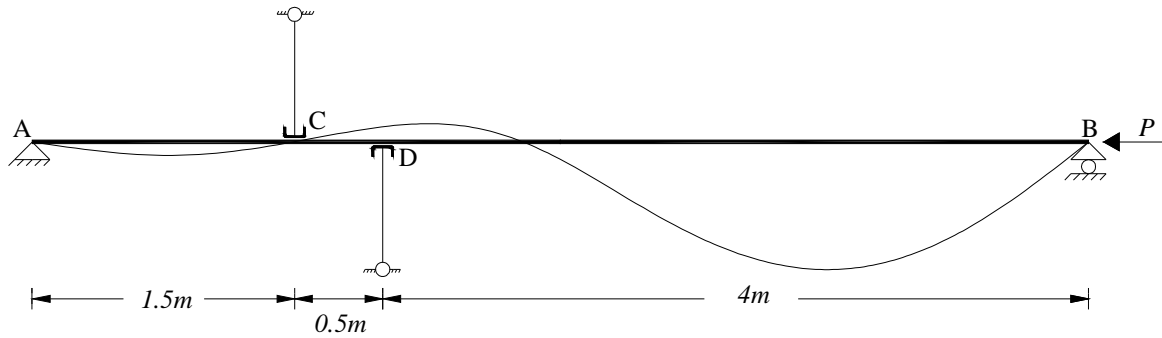
- Εάν ναι, τότε το μη ομογενές υποπρόβλημα έχει μοναδική λύση σε κλειστή μορφή [4].
- Εάν όχι, τότε το μη ομογενές υποπρόβλημα είτε εμφανίζει απειρία λύσεων είτε είναι αδύνατο. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη απειρίας λύσεων αποτελεί η ικανοποίηση της συνθήκης ορθογωνικότητας μεταξύ κάθε ιδιοσυνάρτησης που αντιστοιχεί στην συγκεκριμένη ιδιοτιμή και των μη ομογενών όρων των εξισώσεων (2-4).

Είναι προφανές ότι τα φορτία για τα οποία το πρόβλημα είτε είναι αδύνατο είτε εμφανίζεται απειρία λύσεων, αποτελούν ιδιάζοντα σημεία (singular points) του μαθηματικού προβλήματος. Τα φορτία αυτά είναι ταυτοχρόνως και κρίσιμα φορτία λυγισμού για το μηχανικό πρόβλημα λυγισμού των δοκών με μονόπλευρους συνδέσμους. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο τρόπος με τον οποίο εκδηλώνεται αστάθεια στο φορέα διαφέρει στις ανωτέρω δύο περιπτώσεις. Πιο συγκεκριμένα, για αξονικό φορτίο P το οποίο αποτελεί ιδιοτιμή του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος και για το οποίο το μαθηματικό πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι αδύνατο, η συνάρτηση της ελαστικής γραμμής εμφανίζει δυσανάλογα μεγάλες τιμές καθώς το επιβαλλόμενο αξονικό φορτίο τείνει στο κρίσιμο αυτό φορτίο (“δημιουργία άπειρου βέλους”). Στην αντίθετη περίπτωση (απειρία λύσεων), η αστάθεια εκδηλώνεται ακαριαία όταν το επιβαλλόμενο αξονικό φορτίο γίνει ίσο με την κρίσιμη αυτή ιδιοτιμή. Αυτή η περίπτωση λυγισμού είναι ανάλογη με τον ακαριαίο λυγισμό (snap buckling) που λαμβάνει χώρα στους γεωμετρικά τέλειους φορείς για τα κρίσιμα φορτία λυγισμού.

Με δεδομένο ότι σε στα συνήθη προβλήματα λυγισμού δοκών με μονόπλευρους συνδέσμους οι καταστάσεις επαφής δύναται να εναλλάσσονται κατά την διάρκεια της αξονικής φόρτισης, ο προσδιορισμός των κρίσιμων φορτίων λυγισμού δεν είναι απλή διαδικασία. Για το λόγο αυτό προτείνεται αλγόριθμος υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου αστάθειας δοκών με μονόπλευρους συνδέσμους [4]. Στο παράδειγμα που ακολουθεί γίνεται χρήση του συγκεκριμένου αλγορίθμου και ταυτόχρονα παρουσιάζεται η προτεινόμενη μεθοδολογία για την αντιμετώπιση προβλημάτων λυγισμού δοκών με μονόπλευρους συνδέσμους.

5. ΜΕΛΕΤΗ ΜΙΑΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

Θεωρείται η υποβαλλόμενη σε αξονική θλιπτική φόρτιση γεωμετρικά ατελής δοκός του Σχήματος 3. Η ατελεία της δοκού περιγράφεται από μια ημιτονική σειρά Fourier 10 όρων (Πιν. 2). Με δεδομένο ότι η εύρεση του φορτίου αστάθειας μιας γεωμετρικά ατελούς δοκού απαιτεί την εύρεση των ιδιοτιμών του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος, αρχικά υπολογίζονται οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα κρίσιμα φορτία της γεωμετρικά τέλειας δοκού [4] (Πιν. 4). Η εύρεση του φορτίου αστάθειας βασίζεται στη μόρφωση και επίλυση του ανισοτικού προβλήματος συνοριακών τιμών με βάση τη διαδικασία που περιγραφηκε στις προηγούμενες παραγράφους.



Σχ.3: Γεωμετρικά ατελής δοκός με δύο μονόπλευρους συνδέσμους σε αντίθετη λειτουργία ($EI=6216 \text{ kNm}^2$).

Συντελεστές Fourier				
$g_1 = 0,001912$	$g_2 = -0,00231$	$g_3 = 0,001252$	$g_4 = 0,000279$	$g_5 = -0,000027$
$g_6 = -0,000057$	$g_7 = 0,000012$	$g_8 = 0,000013$	$g_9 = -0,000002$	$g_{10} = -0,000005$

Πίν. 2. Συντελεστές Fourier της γεωμετρικής ατέλειας της δοκού του Σχήματος 3.

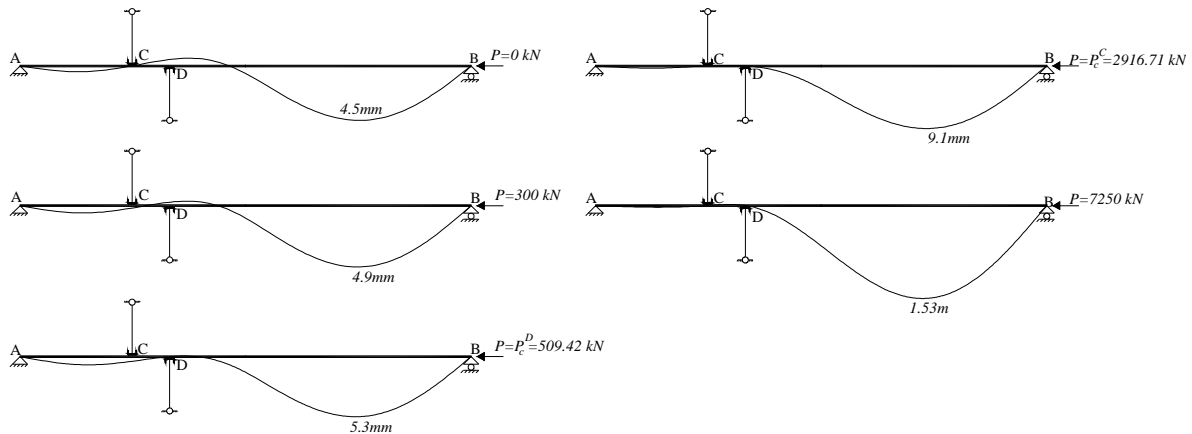
Κατάσταση επαφής	Συνθήκη επαφής	Αποδεκτή ιδιοτιμή	Κρίσιμο φορτίο $w_1(\alpha L) = w_2(0) = u_1 > 0$
CC3	E-A	$k_1 = 0.9022$	$P_{cr,eig}^{(1)} = 5059.6 \text{ kN}$
CC4	A-E	$k_2 = 0.9642$	$P_{cr,eig}^{(2)} = 5778.9 \text{ kN}$
CC1	E-E	$k_3 = 1.0820$	$P_{cr,eig}^{(3)} = 7277.2 \text{ kN}$

Πίν. 3. Οι πρώτες τρεις ιδιοτιμές και τα φορτία λυγισμού για το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα λυγισμού.

Το σκεπτικό του αλγορίθμου εύρεσης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, όπως προτείνεται αναλυτικά στο [4], συνοψίζεται ουσιαστικά στον έλεγχο δύο θεμάτων. Συγκεκριμένα, θα πρέπει να ελεγχθεί κατά την διάρκεια της κάμψης του φορέα λόγω της επίδρασης του αξονικού φορτίου, εάν επέρχεται για κάποιες τιμές του φορτίου μετάβαση από μια κατάσταση επαφής σε μια άλλη. Επιπλέον, θα πρέπει να ελεγχθεί εάν εντός του διαστήματος φορτίσης για το οποίο πραγματοποιείται μια κατάσταση επαφής, κείται τιμή του φορτίου που αποτελεί ιδιοτιμή του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος. Σε αυτή την περίπτωση, η συγκεκριμένη τιμή θα αποτελεί και το ζητούμενο φορτίο αστάθειας.

Εφαρμόζοντας τον προτεινόμενο αλγόριθμο στο υπόψιν παράδειγμα, παρατηρείται ότι κατά την διάρκεια της φόρτισης η δοκός θα μεταβάλλει τις συνθήκες επαφής της με τους συνδέσμους αρκετές φορές (εναλλαγή των στατικών συστημάτων). Αρχικά η δοκός βρίσκεται σε επαφή με τον σύνδεσμο στο σημείο C. Για τιμή του φορτίου ίση με $P = P_S^D = 32,26 \text{ kN}$ η δοκός θα αποχωριστεί από το μονόπλευρο σύνδεσμο (κατάσταση αμφιέριστης δοκού). Εν συνεχεία η δοκός δύναται να φορτιστεί επιπλέον, με αποτέλεσμα για φορτίο $P = P_C^D = 509.42 \text{ kN}$ να έρχεται σε επαφή με το σύνδεσμο στο σημείο D. Για μεγαλύτερο φορτίο ($P = P_C^C = 2916,71 \text{ kN}$) η δοκός έρχεται εκ νέου σε επαφή με το μονόπλευρο σύνδεσμο στο D. Τότε παρατηρείται ότι καθώς το επιβαλλόμενο αξονικό φορτίο τείνει στην κρίσιμη ιδιοτιμή $P = P_{cr,eig}^3 = 7277,2 \text{ kN}$ (Πίν. 3) οι μετακινήσεις της

δοκού αυξάνονται δυσανάλογα προκαλώντας μεγάλα βέλη στην ελαστική γραμμή. Επομένως το κρίσιμο φορτίο αστάθειας της δοκού είναι ίσο με $P_{in} = P_{cr,eig}^3 = 7277,2 \text{ kN}$. Στο Σχ.4 απεικονίζεται η ελαστική γραμμή του φορέα για διάφορες τιμές του επιβαλλόμενου αξονικού φορτίου.



Σχ.4: Σχηματική απεικόνιση των μετακινήσεων της δοκού για διάφορες τιμές του επιβαλλόμενου φορτίου.

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρόν άρθρο παρουσιάζεται μια αναλυτική μέθοδος υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου αστάθειας γεωμετρικά ατελών δοκών υπο αξονική θλιψη με μονόπλευρους συνδέσμους. Το πρόβλημα είναι εντόνως μη γραμμικό μιας και λαμβάνουν χώρα φαινόμενα γεωμετρικής μη γραμμικότητας σε συνδυασμό με φαινόμενα επαφής. Παρόλα αυτά, η προτεινόμενη διαδικασία παρέχει ακριβή αναλυτική λύση χωρίς την εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων και εξιδεικευμένου λογισμικού.

7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] ΚΟΥΝΑΔΗΣ Α.Ν. , “Γραμμική θεωρία ελαστικής ευστάθειας”, Εκδόσεις Συμεών, 1997
- [2] TIMOSHENKO S.P. AND GERE M. J. , “Theory of elastic stability”, Boston: McGraw-Hill,1963
- [3] PANAGIOTOPOULOS P.D. , “Inequality problems in mechanics and applications. Convex and nonconvex energy functions”, Birkhauser, Boston, Bassel, Stuttgart,1985
- [4] TZAROS K.A. , “The unilateral contact buckling problem of geometrically perfect and imperfect beams”, Doctoral Dissertation, University of Thessaly, 2011
- [5] REKTORYS K. , “Solving ordinary and partial boundary value problems in science and engineering”, CRC Press, London, 1999

THE BUCKLING PROBLEM OF GEOMETRICALLY IMPERFECT BEAMS IN THE PRESENCE OF UNILATERAL SUPPORTS

Konstantinos Tzaros

Dr. Civil Engineer

Laboratory of Structural Analysis and Design, Dept. of Civil Engineering,
University of Thessaly,
Volos, Greece

e-mail: ktzaros@civ.uth.gr

Euripidis Mistakidis

Associate Professor

Laboratory of Structural Analysis and Design, Dept. of Civil Engineering,
University of Thessaly,
Volos, Greece

e-mail: emistaki@civ.uth.gr

SUMMARY

The present paper deals with the unilateral contact buckling problem of axially loaded geometrically imperfect beams, in the presence of unilateral supports. Without compromising generality, the contact buckling problem of a beam with two intermediate unilateral constraints in an “opposite” functioning mode is considered. However, the proposed methodology can be extended in order to handle more than two intermediate unilateral constraints. The latter is based on the linear elastic stability theory, appropriately extended in order to take into account the unilateral constraints. More specifically, the considered beam is separated into parts by the unilateral supports and for each part of the beam a fourth-order non-homogeneous differential equation is constructed, arising from the Euler equilibrium method and describing the bending behaviour of the beam in the framework of the second order bending theory. The governing differential equations together with the boundary conditions, the inequality conditions and the complementarity conditions (as a result of the function of the unilateral constraints) formulate a Boundary Value Problem (BVP) with certain restrictions. The latter describes the contact buckling problem of the considered axially loaded beams with the unilateral supports. The solution of the previous non-homogeneous BVP is not a simple issue due to the fact that the problem may be unsolvable, uniquely solvable or solvable with infinite solutions. The concept of the proposed methodology for the solution of the studied BVP is based on the different contact conditions which can occur during the bending deformation. According to that, the initial BVP is separated into subproblems, one for each contact situation. Then, an appropriate calculation procedure is proposed for the calculation of the instability load and the final buckling shape. The latter has the ability to detect the singular points (critical points) of the problem which, in turn, constitute the instability loads of the beam. The methodology is demonstrated through a characteristic example.