

**ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ
ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΠΛΑΙΣΙΩΝ ΜΕ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΕΔΑΦΟΥΣ-ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ**

Ρόνι Παντούλης

Διπλ. Πολιτικός Μηχανικός ΑΠΘ
e-mail: ronnie.12@live.com

Κωνσταντίνος Νικολάου

Διπλ. Πολιτικός Μηχανικός, Υποψ. Διδάκτορας
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών ΑΠΘ
54124 Θεσσαλονίκη, Ελλάδα
e-mail: konnikol@civil.auth.gr

Κωνσταντίνος Γεωργιάδης

Επικ. Καθηγητής
Εργαστήριο Εδαφομηχανικής, Θεμελιώσεων και Γεωτεχνικής Σεισμικής Μηχανικής,
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών ΑΠΘ
54124 Θεσσαλονίκη, Ελλάδα
e-mail: kgeorg@civil.auth.gr

Χρήστος Μπίσμπος

Καθηγητής
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών ΑΠΘ,
54124 Θεσσαλονίκη, Ελλάδα
e-mail: cbisbos@civil.auth.gr

1. ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία μορφώνονται και μελετώνται ως προβλήματα μαθηματικής βελτιστοποίησης τα προβλήματα της οριακής ανάλυσης και ανάλυσης προσαρμογής επιπέδων μεταλλικών πλαισίων λαμβάνοντας υπόψη την αλληλεπίδραση εδάφους-κατασκευής. Τα πλαίσια διακριτοποιούνται με συνήθη δίκωμα ραβδωτά στοιχεία και τοπικά κριτήρια διαρροής N-V_Z-M_Y κατά το DIN 18800 εισάγονται στις θέσεις ελέγχου των τάσεων. Η αλληλεπίδραση εδάφους-κατασκευής εισάγεται μέσω γενικευμένων ελατηρίων (σύζευξη των N-V_Z-M_Y) που υπακούουν στο αντίστοιχο κριτήριο διαρροής Gourvenec, το οποίο γραμμικοποιείται κατάλληλα ως κλειστό πολύεδρο. Τα προβλήματα οριακής ανάλυσης και ανάλυσης προσαρμογής (με προσέγγιση κάτω ορίου) ανάγονται τότε σε προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού. Παρατίθεται αριθμητικό παράδειγμα.

2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η οριακή ανάλυση (Limit Analysis - LA) και η ανάλυση προσαρμογής (Shakedown Analysis - SDA) συναποτελούν τις Άμεσες Μεθόδους (Direct Methods) της Πλαστικότητας (βλ. π.χ. [1-2]), με τις οποίες επιτυγχάνεται κατά μη-βηματικό τρόπο η αποτίμηση των περιθωρίων ασφαλείας πλαστίμων φορέων, όταν η φόρτιση μεταβάλλεται, είτε μονοτονικά (περίπτωση LA), είτε κατά τυχαίο τρόπο εντός όμως δοσμένων ορίων (περίπτωση SDA). Η υπολογιστική υλοποίηση των Αμέσων Μεθόδων επιτυγχάνεται με την σύζευξη μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων με τεχνικές Μαθηματικής Βελτιστοποίησης. Αν τα κριτήρια διαρροής, δηλαδή οι σχέσεις πλαστικής αλληλεπίδρασης λαμβάνονται γραμμικοποιημένα, οδηγούμαστε σε ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού (Linear Programming - LP). Διαφορετικά, υπό μη γραμμικά κριτήρια προκύπτουν προβλήματα Μη Γραμμικού Προγραμματισμού (βλ. π.χ. [3-4]).

Οι ανωτέρω Άμεσες Μέθοδοι έχουν εκτεταμένα εφαρμοστεί σε προβλήματα φορέων. Επιπλέον, έχουν κατά ανεξάρτητο τρόπο εφαρμοστεί σε γεωτεχνικά προβλήματα (βλ. π.χ. [5-6]). Θέματα αλληλεπίδρασης εδάφους-φορέων έχουν αντιμετωπιστεί μόνον σε κυρίως γεωτεχνικά προβλήματα (βλ. π.χ. [7]) χωρίς την συν-θεώρηση των καθαυτό φορέων.

Η παρούσα εργασία έχει ως αντικείμενο την οριακή ανάλυση και την ανάλυση προσαρμογής επιπέδων μεταλλικών πλαισίων με αλληλεπίδραση εδάφους-κατασκευής. Απαιτήθηκαν δύο 3D κριτήρια (αλληλεπίδραση N-V_z-M_y), ένα για το έδαφος και ένα για τις μεταλλικές ράβδους. Για τις τελευταίες χρησιμοποιήθηκε το κριτήριο του DIN 18800 για διατομές από χάλυβα [8]. Η αντοχή του εδάφους στην περιοχή ενός θεμελίου εισάγεται με το κριτήριο Gourvenec [9], το οποίο γραμμικοποιείται κατάλληλα ως κλειστό πολύεδρο. Σημειώνεται πως η συμβολή του εδάφους στην δυσκαμψία του όλου στατικού συστήματος εισάγεται μέσω γενικευμένων ελατηρίων (σύζευξη των N-V_z-M_y) με 3x3 μητρώο δυσκαμψίας που μπορεί να έχει μη-διαγώνιους όρους.

3. N-V_z-M_y ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ Η-ΔΙΑΤΟΜΩΝ ΚΑΤΑ DIN 18800

Το DIN 18800 [8] προβλέπει πως η N-V_z-M_y πλαστική αλληλεπίδραση συμμετρικών I- και H-διατομών περιγράφεται από τον Πίνακα 1:

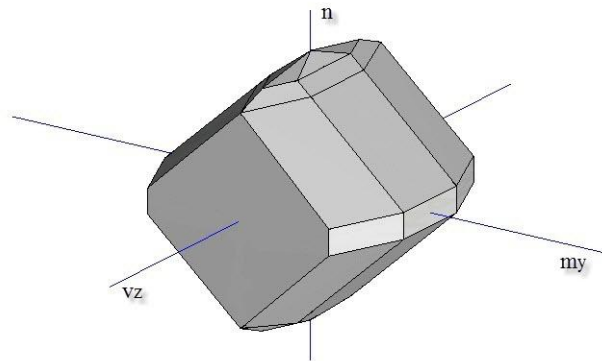
Εύρος Ισχύος	$\frac{V_z}{V_{plz,d}} \leq 0,33$	$0,33 \leq \frac{V_z}{V_{plz,d}} \leq 0,9$
$\frac{N}{N_{pl,d}} \leq 0,1$	$\frac{M_y}{M_{ply,d}} \leq 1$	$0,88 \frac{M_y}{M_{ply,d}} + 0,37 \frac{V_z}{V_{plz,d}} \leq 1$
$0,1 \leq \frac{N}{N_{pl,d}} \leq 1$	$0,9 \frac{M_y}{M_{ply,d}} + \frac{N}{N_{pl,d}} \leq 1$	$0,8 \frac{M_y}{M_{ply,d}} + 0,89 \frac{N}{N_{pl,d}} + 0,33 \frac{V_z}{V_{plz,d}} \leq 1$

Πιν. 1. Σχέσεις κριτηρίου αλληλεπίδρασης DIN

Τα $N_{pl,d}$, $M_{ply,d}$ και $V_{plz,d}$, αποτελούν τις επιμέρους πλαστικές αντοχές σχεδιασμού, ενώ N , M_y και V_z αποτελούν τις απόλυτες τιμές των δρώντων μεγεθών τομής. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούνται τα αντίστοιχα αλγεβρικά αδιάστατα μεγέθη:

$$n = N / N_{pl,d} \quad m_y = M_y / M_{ply,d} \quad v_z = V_z / V_{plz,d} \quad (1)$$

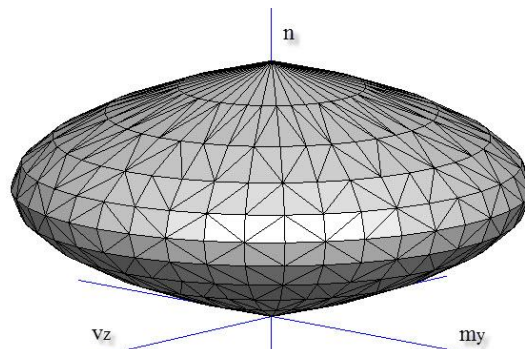
Τότε το κριτήριο διαρροής αποτελεί ένα κλειστό πολύεδρο με σύνορο αποτελούμενο από 20 επίπεδα κατά το εξής σχήμα:



Σχ. 1. Γραμμικοποιημένο κριτήριο διαρροής DIN

4. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΟΥ ΕΛΑΦΟΥΣ – ΚΡΙΤΗΡΙΟ GOURVENEC

Η επιρροή του εδάφους εισάγεται με γενικευμένα ελατήρια, δηλαδή μονόκομβο στοιχεία με 3 βαθμούς ελευθερίας και αντίστοιχο τρισδιάστατο διάνυσμα έντασης V-H-M, όπου V η κατακόρυφη δύναμη που ασκείται στο θεμέλιο (θλίψη θετική), H η αντίστοιχη οριζόντια και M η ροπή. Για το μονόκομβο αυτό στοιχείο εφαρμόζεται καταρχήν γεωτεχνικό 3x3 μητρώο δυσκαμψίας που περιέχει και μη-διαγώνιους όρους.



Σχ. 2. Γραμμικοποιημένο κριτήριο Gourvenec - διαρροή αργιλικών εδαφών

Θεωρήθηκαν αργιλικά εδάφη με αστράγγιστη διατμητική αντοχή C_u . Τότε, για ένα τετραγωνικό θεμέλιο πλευράς B, τα αντίστοιχα επιμέρους οριακά μεγέθη δίνονται από:

$$V_{ult} = 5,91C_u B^2 \quad H_{ult} = C_u B^2 \quad M_{ult} = 0,69C_u B^3 \quad (2)$$

Εισάγοντας τα αντίστοιχα αδιάστατα μεγέθη $n = V / V_{ult}$, $v = H / H_{ult}$ και $m = M / M_{ult}$, το κριτήριο Gourvenec [9] παίρνει την μορφή:

$$v^2 + m^2 \leq 16n^2(1-n)^2 \quad (3)$$

με τα μεγέθη v, m να μηδενίζονται για τις ακραίες τιμές $n = 0$ και $n = 1$. Σημειώνεται πως το κριτήριο δεν επιτρέπει εφελκυστικές δυνάμεις στα θεμέλια, δηλαδή λαμβάνει έμμεσα

υπόψη το πρόβλημα της απώλειας επαφής. Στο Σχήμα 2 φαίνεται η γραμμικοποίηση του κριτηρίου αυτού με 336 επίπεδα, όπως χρησιμοποιήθηκε στο αριθμητικό παράδειγμα.

5. ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ

Έστω διακριτοποιημένος φορέας Ω , στον οποίο ορίζονται NG σημεία ελέγχου των τάσεων (τα σημεία Gauss στην κλασική ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων). Στον φορέα με NV ελεύθερους βαθμούς ελευθερίας επιβάλλονται μια μόνιμη φόρτιση και NV μεταβλητές. Στο j-σημείο Gauss η ένταση λόγω μιας φόρτισης i θα περιγράφεται από ένα τοπικό διάνυσμα $\mathbf{s}_j^{(i)} = (N, V_z, M_y)^T$, που πρέπει να ικανοποιεί το αντίστοιχο τοπικό κριτήριο διαρροής. Τα γραμμικοποιημένα κριτήρια αποτελούν ένα σύνολο ανισοτήτων της μορφής:

$$N_j^T \mathbf{s}_j^{(i)} \leq \mathbf{r}_j \quad j=1,2,\dots, NG \quad (4)$$

Αν $\mathbf{v}_j^{(i)}$ είναι το διάνυσμα της ελαστικής έντασης στο σημείο j για την i κορυφή φόρτισης, \mathbf{p}_j το αντίστοιχο διάνυσμα λόγω των μόνιμων δράσεων, α ο πολλαπλασιαστής των μεταβλητών φορτίων και \mathbf{p}_j ένα αυτοϊσορροπούμενο εντατικό πεδίο, το πρόβλημα της ανάλυσης προσαρμογής (Elastic Shakedown) έχει ως εξής:

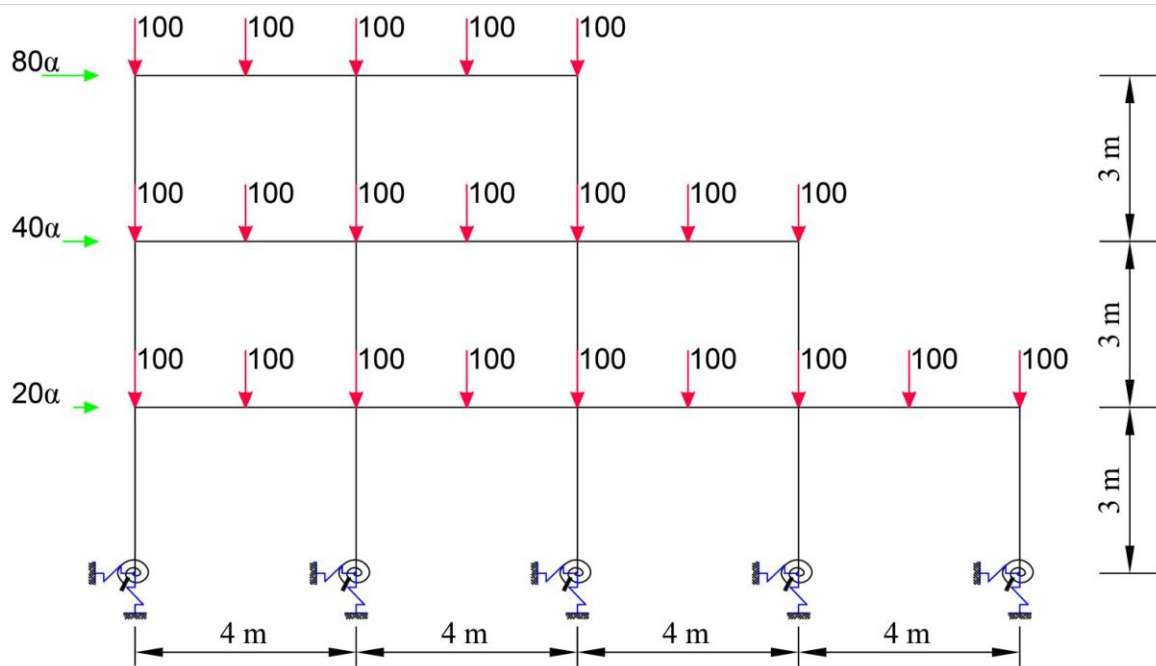
$$\begin{aligned} P_{ESD} \quad & \max \alpha \\ & s.t.: \sum \mathbf{H}_j \mathbf{p}_j = \mathbf{0} \\ & \mathbf{s}_j^{(i)} = \alpha \mathbf{v}_j^{(i)} + \mathbf{p}_j + \mathbf{p}_j \\ & \mathbf{N}_j^T \mathbf{s}_j^{(i)} \leq \mathbf{r}_j \quad j=1,2,\dots, NG \ \& \ i=1,2,\dots, NV \end{aligned} \quad (5)$$

Τα μητρώα \mathbf{H}_j συναποτελούν το μητρώο ισορροπίας του φορέα. Αν ο αριθμός των κορυφών μεταβλητής φόρτισης γίνει μονάδα, δηλαδή NV = 1 τότε προκύπτει το πρόβλημα της οριακής ανάλυσης. Αντίστοιχα αν παραλειφθεί η συνθήκη μηδενικού υποχώρου (null space condition) προκύπτει το πρόβλημα της πλαστικής προσαρμογής (Plastic Shakedown) το οποίο συνδέεται με φαινόμενα πλάστιμης ολιγοκυκλικής κόπωσης.

$$\begin{aligned} P_{PSD} \quad & \max \alpha \\ & s.t.: \mathbf{s}_j^{(i)} = \alpha \mathbf{v}_j^{(i)} + \mathbf{p}_j + \mathbf{p}_j \\ & \mathbf{N}_j^T \mathbf{s}_j^{(i)} \leq \mathbf{r}_j \quad j=1,2,\dots, NG \ \& \ i=1,2,\dots, NV \end{aligned} \quad (6)$$

6. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται η οριακή ανάλυση και ανάλυση προσαρμογής ενός μη-κανονικού επίπεδου τριώροφου πλαισίου (βλ Σχήμα 3). Το πλαίσιο αποτελείται από δοκούς διατομής IPE330 και στύλους διατομής HEA300 από χάλυβα ποιότητας S235. Το μέτρο ελαστικότητας είναι E = 210 GPA και ο λόγος Poisson $\nu = 0,30$.



Σχ. 3. Προσομοίωμα φορέα παραδείγματος

Στις βάσεις των υποστυλωμάτων θεωρήθηκαν τετραγωνικά θεμέλια διαστάσεων 2,5x2,5 m και αργιλικό έδαφος με $C_u = 100$ kPa, $E = 10000$ kPa και $\nu = 0,5$. Με αυτά τα δεδομένα, οι τιμές της δυσκαμψίας των ελατηρίων (διαγώνιοι όροι) προκύπτουν $K_n = 36666,75$ kN/m, $K_v = 23466,75$ kN/m, $K_m = 9009$ kNm/rad.

Τα κατακόρυφα συγκεντρωμένα φορτία $P = 100$ kN αποτελούν τις μόνιμες δράσεις. Επιπλέον επιβάλλεται μεταβλητή οριζόντια φόρτιση, η οποία αποτελείται από οριζόντια φορτία σε κάθε στάθμη ορόφου, αυξανόμενα κατά το ύψος με τιμές 20α, 40α, 80α στον 1^ο, 2^ο και 3^ο όροφο αντίστοιχα (α είναι ο πολλαπλασιαστικός συντελεστής, ο οποίος έχει το νόημα του συντελεστή ασφάλειας).

Εξετάστηκαν οι εξής 2 περιπτώσεις προσομοίωσης: α) με αλληλεπίδραση και β) χωρίς αλληλεπίδραση (πλήρεις πακτώσεις στην βάση των στύλων). Υπολογίστηκε τόσο ο αντίστοιχος συντελεστής ασφαλείας για οριακή ανάλυση όσο και οι συντελεστές ελαστικής και πλαστικής προσαρμογής για φορτία μεταβαλλόμενα από μηδέν μέχρι τις τιμές του Σχ.3. Επίσης υπολογίστηκε το ελαστικό όριο, δηλαδή η τιμή του συντελεστή α για την οποία εμφανίζεται στον φορέα η πρώτη πλαστική άρθρωση.

	ΧΩΡΙΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ	ΜΕ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ
Ελαστικό Όριο	$\alpha_{ELM} = 2,818$	$\alpha_{ELM} = 2,055$
Ελαστική Προσαρμογή	$\alpha_{ESD} = 4,667$	$\alpha_{ESD} = 4,380$
Πλαστική Προσαρμογή	$\alpha_{PSD} = 7,228$	$\alpha_{PSD} = 6,324$
Οριακή Ανάλυση	$\alpha_{LMT} = 4,667$	$\alpha_{LMT} = 4,380$

Πιν. 2. Συντελεστές ασφαλείας για τα δύο προσομοιώματα

Τα αποτελέσματα των παραπάνω αναλύσεων παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 2. Όταν λαμβάνεται υπόψη η αλληλεπίδραση οι τιμές των συντελεστών ασφαλείας είναι μικρότερες. Στο προσομοίωμα με αλληλεπίδραση στα εδαφικά ελατήρια μεταβιβάζονται μικρότερες ροπές όπως ήταν αναμενόμενο συγκριτικά με το αντίστοιχο μοντέλο με πλήρεις πακτώσεις ενώ στις δοκούς μεταβιβάζονται μεγαλύτερες ροπές.

7. ΣΧΟΛΙΑ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Παρουσιάστηκε το πρόβλημα της οριακής ανάλυσης και ανάλυσης προσαρμογής επίπεδων μεταλλικών πλαισίων λαμβάνοντας υπόψη την αλληλεπίδραση με το έδαφος. Χρησιμοποιήθηκαν κατάλληλα κριτήρια διαρροής για τα μεταλλικά στοιχεία και το έδαφος. Στο αριθμητικό παράδειγμα υπολογίστηκαν οι συντελεστές ασφαλείας έναντι πλαστικής κατάρρευσης ενός επίπεδου, μη-κανονικού μεταλλικού πλαισίου και συγκρίθηκαν με εκείνα της κλασικής οριακής ανάλυσης/ανάλυσης προσαρμογής του φορέα χωρίς αλληλεπίδραση. Παρατηρήθηκε πως η αλληλεπίδραση του εδάφους-κατασκευής οδήγησε σε μικρότερους συντελεστές ασφαλείας.

8. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] COHN M.Z. and MAIER G. (Eds) “*Engineering plasticity by mathematical programming*”, 1977, Pergamon Press, New York,
- [2] KOENIG J.A. “*Shakedown of elastic-plastic structures*”, 1987, Elsevier, Amsterdam
- [3] BISBOS CD., PARDALOS PM. “Second Order Cone and Semidefinite Representations of Material Failure Criteria”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 134 (2), 2007, pp. 275
- [4] SKORDELI MA-A., BISBOS C.D. “Limit and shakedown analysis of 3d steel frames via approximate ellipsoidal yield surfaces”, *Engineering Structures* Vol. 32 (6), 2010, pp.1556-1567.
- [5] CHEN W.-F. “*Limit analysis in soil plasticity*”, 1975, Elsevier, Amsterdam.
- [6] GEORGIADIS K. “An upper bound solution for the undrained bearing capacity of strip footings at the top of a slope”. *Geotechnique*, Vol. 60 (10), 2010, pp. 801-806
- [7] GEORGIADIS K., SLOAN S.W., LYAMIN A.V. “Ultimate lateral pressure of two side-by-side piles in clay”. *Geotechnique*, Vol. 63(9) , 2012, pp. 733-745.
- [8] SCHNEIDER K.J. “*Bautabellen für Ingenieure mit europäischen und nationalen Vorschriften, 12. Auflage*” 1996, Werner-Verlag.
- [9] GOURVENEK S. “Shape effects on the capacity of rectangular footings under general loading”, *Geotechnique*, Vol. 57, No. 8, 2007, pp. 637-646.

LIMIT AND SHAKEDOWN ANALYSIS OF PLANAR STEEL FRAMES WITH SOIL-STRUCTURE INTERACTION

Ronnie Pantoulis

Civil Engineer

e-mail: ronnie.12@live.com

Konstantinos Nikolaou

Civil Engineer, PhD Candidate

Institute of Metal Structures, Dept. of Civil Engineering, Aristotle University

54124 Thessaloniki, Greece

e-mail: konnikol@civil.auth.gr

Konstantinos Georgiadis

Assistant Professor

Institute of Soil Mechanics, Foundation and Geotechnical Earthquake Engineering,

Dept. of Civil Engineering, Aristotle University

54124 Thessaloniki, Greece

e-mail: kgeorg@civil.auth.gr

Christos Bisbos

Professor

Institute of Metal Structures, Dept. of Civil Engineering, Aristotle University

54124 Thessaloniki, Greece

e-mail: cbisbos@civil.auth.gr

SUMMARY

This paper addresses the problems of limit and shakedown analysis of planar steel frames taking into account soil-structure interaction using mathematical programming techniques. The steel frames are discretized using standard two-node elements and $N-V_Z-M_Y$ plastic interaction surfaces according to DIN 18800. Soil is modeled using generalized springs with piece-wise-linearized Gourvenec yield criterion. Quasi-lower bound limit and shakedown analysis under such criteria are solved as linear programming problems. A numerical example of a simple moment resisting frame is presented.