

Η ΕΠΙΡΡΟΗ ΑΞΟΝΙΚΟΥ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΥ ΣΤΗΝ ΚΡΙΣΙΜΗ ΡΟΠΗ ΠΛΕΥΡΙΚΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΔΟΚΩΝ

Τάσος Π. Αβραάμ

Λέκτορας, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αθήνα, Ελλάδα

e-mail: avraamt@central.ntua.gr

Ζαχαρίας Χ. Φασουλάκης

Υποψήφιος Διδάκτωρ, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αθήνα, Ελλάδα

e-mail: zaf@central.ntua.gr

Γεώργιος Ι. Ιωαννίδης

Καθηγητής, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αθήνα, Ελλάδα

e-mail: giorgos.ioan@gmail.com

1. ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο στρεπτοκαμπτικός λυγισμός αποτελεί τη συνήθη μορφή αστοχίας των πλευρικά μη εξασφαλισμένων καμπτόμενων δοκών. Η παρουσία αξονικής θλιπτικής δύναμης περιορίζει περαιτέρω την αντοχή σε κάμψη ενώ αντίθετα η παρουσία εφελκυστικής αξονικής δύναμης έχει ευνοϊκή επιρροή. Στην επιρροή αυτή δεν γίνεται αναφορά στους περισσότερους σύγχρονους κανονισμούς, όπως για παράδειγμα στην ισχύουσα έκδοση του Ευρωκώδικα 3, και συνήθως δεν λαμβάνεται υπόψη κατά τη διαστασιολόγηση. Στην παρούσα εργασία προσδιορίζονται τόσο η κρίσιμη (ελαστική) καμπτική ροπή στρεπτοκαμπτικού λυγισμού όταν με τα εγκάρσια φορτία τα οποία προκαλούν την κάμψη συνυπάρχει αξονική δύναμη (θλιπτική ή εφελκυστική), όσο επίσης το σχετικό μέγεθος της εφελκυστικής αυτής αξονικής δύναμης άνω του οποίου ο στρεπτοκαμπτικός λυγισμός δεν αποτελεί πιθανή μορφή αστοχίας, δεν μπορεί δηλαδή να υπάρξει ισορροπία στην παραμορφωμένη κατάσταση. Μέσω της ελαστικής ροπής είναι δυνατόν, κατά τις κανονιστικές διατάξεις, να υπολογιστεί τελικά η αντοχή της δοκού. Για τον προσδιορισμό της κρίσιμης κατά τα ανωτέρω ροπής διατυπώνονται, σε αμφιέριστες δοκούς, οι εξισώσεις ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση και επιλύεται η προκύπτουσα διαφορική εξίσωση ισορροπίας. Η κρίσιμη ροπή προσδιορίζεται για συνήθεις περιπτώσεις εγκάρσιας φόρτισης: δύο ίσες ακραίες συγκεντρωμένες ροπές (περίπτωση ομοιόμορφης κάμψης), συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον του ανοίγματος, ομοιόμορφα διανεμημένο φορτίο. Έχουν χαραχθεί οι σχετικές καμπύλες αλληλεπίδρασης για τις οποίες δίδονται επίσης προσεγγιστικές αναλυτικές σχέσεις.

2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αντοχή πλευρικά μη προστατευμένων δοκών έναντι στρεπτοκαμπτικού λυγισμού, οι οποίες υπόκεινται σε εγκάρσια φορτία και αξονική θλιπτική δύναμη έχει εκτενώς μελετηθεί πειραματικά ή αναλυτικά, τόσο στην ελαστική όσο και την ανελαστική περιοχή, από πολλούς ερευνητές [1-3], τα δε αποτελέσματα των ερευνών έχουν ήδη εισαχθεί στους σύγχρονους κώδικες. Η γενική περίπτωση τυχαίας διατομής με τυχαία εγκάρσια διανεμημένη φόρτιση και αξονική δύναμη, έχει επίσης μελετηθεί με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων [4]. Η επιρροή των προλυγισμικών, λόγω της κάμψης, παραμορφώσεων στη στάθμη των φορτίων λυγισμού έχει επίσης μελετηθεί [5]. Δεν υπάρχουν ωστόσο πολλές εργασίες για την περίπτωση εγκάρσιας καμπτικής φόρτισης και εφελκυστικών αξονικών δυνάμεων, οι οποίες έχουν ευνοϊκή επιρροή στην ευστάθεια της δοκού. Η επιρροή αυτή σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να είναι σημαντική.

Η εργασία αναφέρεται σε δοκούς με πολύ μεγαλύτερη δυσκαμψία ως προς τον κύριο άξονα αδρανείας σχετικά με τον δευτερεύοντα, οι οποίες χάνουν σχετικά νωρίς την ευστάθειά τους και στις οποίες οι προλυγισμικές καμπτικές παραμορφώσεις δεν έχουν σημαντική επιρροή. Για τις εξεταζόμενες περιπτώσεις εγκάρσιας φόρτισης καταστρώνονται οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση τόσο για την περίπτωση των εφελκυστικών όσο και για την περίπτωση των θλιπτικών αξονικών δυνάμεων και χαράσσονται οι καμπύλες αλληλεπίδρασης. Η ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων γίνεται με τη χρήση προσεγγιστικής τεχνικής [6]. Στην περίπτωση του εφελκυσμού αναζητείται επίσης η σχετική προς την καμπτική ροπή στάθμη της εφελκυστικής αξονικής δύναμης για την οποία δεν υπάρχει λύση των παραπάνω εξισώσεων, δεν υπάρχει δηλαδή δυνατότητα ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση και επομένως ο στρεπτοκαμπτικός λυγισμός δεν αποτελεί δυνατή μορφή αστοχίας.

3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

3.1 Γενικά

Για τη μελέτη μας θα χρησιμοποιηθεί το μοντέλο της αμφιέριστης δοκού, διατομής διπλής συμμετρίας. Το άνοιγμα της δοκού είναι ℓ και φορτίζεται συγχρόνως από αξονικό (που εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους της διατομής) και εγκάρσιο καμπτικό φορτίο. Εξετάζεται η περίπτωση τόσο θλιπτικού όσο και εφελκυστικού αξονικού φορτίου. Το εγκάρσιο φορτίο δρα στο επίπεδο της μεγαλύτερης δυσκαμψίας το οποίο ορίζεται από τον κατακόρυφο άξονα y και τον διαμήκη άξονα z . Αναζητούμε το κρίσιμο μέγεθος της καμπτικής ροπής για την οποία η δοκός λυγίζει πλευρικά σε σχέση πάντα με την ύπαρξη σταθερού μεγέθους αξονικού θλιπτικού ή εφελκυστικού φορτίου. Η περίπτωση εφελκυστικού αξονικού φορτίου και σταθερής ροπής (ομοιόμορφης κάμψης) έχει ήδη μελετηθεί, μέσω γραμμικής και μη γραμμικής θεωρίας ευστάθειας [7].

Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση (Σχ.1) για την περίπτωση του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού είναι [8]:

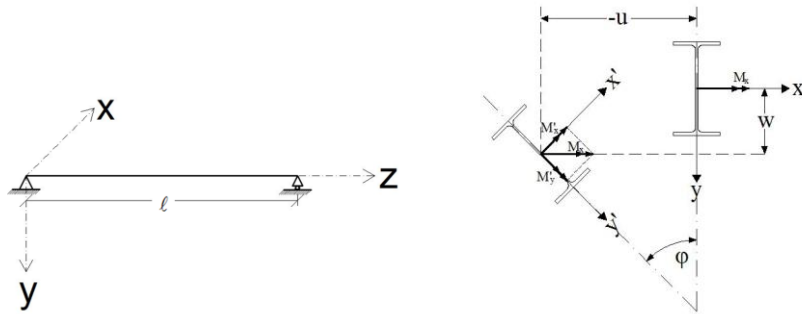
$$EI_x w''(z) + Nw(z) = -M_x \quad (1\alpha)$$

$$EI_y u''(z) + Nu(z) = M_x \cdot \varphi(z) \quad (1\beta)$$

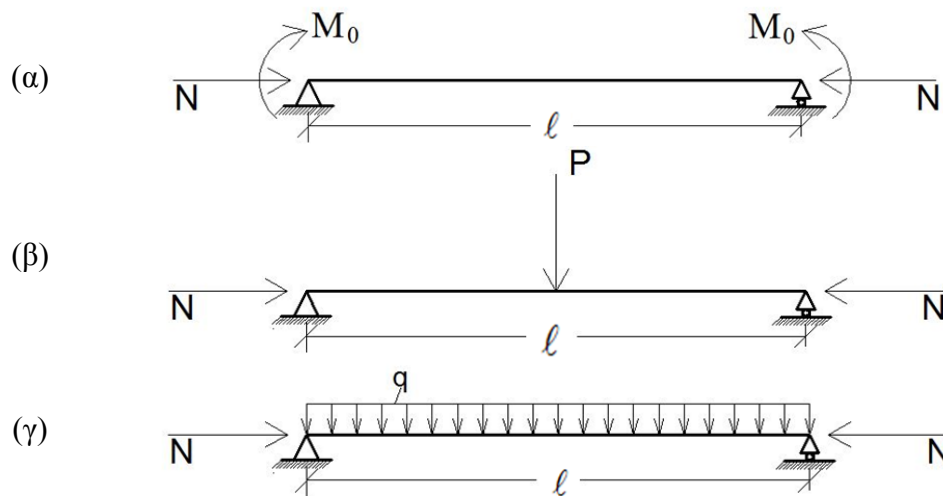
$$GJ \varphi'(z) - EC_w \varphi'''(z) = -M_x \cdot u'(z) \quad (1\gamma)$$

όπου ο τόνος υποδηλοί παράγωγο ως προς z . EI_x , EI_y είναι αντίστοιχα η μέγιστη και ελάχιστη καμπτική δυσκαμψία, E και G είναι το μέτρο ελαστικότητας και το μέτρο διάτμησης ενώ GJ και EC_w είναι οι δυσκαμψίες στρέψης και στρέβλωσης της δοκού αντίστοιχα. Στις εξ. (1α) και (1β) η αξονική δύναμη εισάγεται με θετικό πρόσημο για την περίπτωση της θλίψης και αρνητικό πρόσημο για την περίπτωση εφελκυσμού.

Παρατηρούμε ότι η εξ. (1α) είναι ανεξάρτητη από τις άλλες δύο οι οποίες και επαρκούν για τη μελέτη του πλευρικού-στρεπτοκαμπτικού λυγισμού της δοκού.



Σχ. 1: Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός καμπτόμενων δοκών με διατομή διπλής συμμετρίας



Σχ. 2: Πλευρικός – στρεπτοκαμπτικός λυγισμός καμπτόμενων δοκών διατομή διπλής συμμετρίας με κεντρικό αξονικό φορτίο και α) σταθερές ροπές στα άκρα, β) εγκάρσιο φορτίο στο μέσον της δοκού και γ) ομοιόμορφα κατανεμημένο εγκάρσιο φορτίο

3.2 Αξονικό φορτίο και ομοιόμορφη κάμψη - συγκεντρωμένες ροπές στα άκρα M_0

Οι εξ. (1β) και (1γ) υπό αδιαστατοποιημένη μορφή γράφονται:

$$v''(\xi) + \eta^2 v(\xi) = \bar{M}_0 \cdot \varphi \tag{2α}$$

$$\varphi'''(\xi) - \lambda^2 \varphi'(\xi) - p^2 \cdot \bar{M}_0 \cdot v'(\xi) = 0 \tag{2β}$$

όπου

$$v = u / \ell, \quad \xi = z / \ell, \quad \eta^2 = N \ell^2 / EI_y, \quad \bar{M}_0 = M_0 \cdot \ell / EI_y, \quad \lambda^2 = GJ \ell^2 / EC_w$$

$$\text{και } p^2 = I_y \cdot \ell^2 / C_w$$

Μετά από απαλοιφή της συνάρτησης $v(\xi)$ μεταξύ των δύο παραπάνω εξισώσεων, λαμβανομένων υπόψη και των συνοριακών συνθηκών, προκύπτει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση ως προς φ

$$\varphi'''(\xi) - b \cdot \varphi''(\xi) - c \cdot \varphi(\xi) = 0 \tag{3}$$

όπου $b = \lambda^2 - \eta^2$ και $c = p^2 \cdot \bar{M}_0^2 + \eta^2 \cdot \lambda^2$.

Η λύση της ανωτέρω διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$\varphi(\xi) = \varphi_0 \cdot \sin(\pi \cdot \xi) \quad (4)$$

η δε κρίσιμη αδιαστατοποιημένη ροπή πλευρικού λυγισμού δίδεται από τη σχέση [7,9]

$$\bar{M}_{0,cr} = \frac{1}{p} \cdot \sqrt{(\pi^2 + \lambda^2) \cdot (\pi^2 - \eta^2)} \quad (5)$$

για $\eta^2 < \pi^2$ (περίπτωση θλιπτικού φορτίου).

Μετά από διερεύνηση της εξ. (3), στην περίπτωση εφελκυστικού αξονικού φορτίου, προκύπτει ότι [7] για

$$\eta^2 \geq p^2 \cdot \bar{M}_0^2 / \lambda^2 \quad (6)$$

$$\text{ή } N \geq M_0^2 / GJ \quad (7)$$

δεν υπάρχει δυνατότητα ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση δηλαδή κίνδυνος πλευρικού λυγισμού. Μόνη δυνατότητα ισορροπίας είναι η τετριμμένη λύση $\varphi(\xi) = 0$.

3.3 Αξονικό φορτίο και συγκεντρωμένο εγκάρσιο φορτίο στο μέσον της δοκού

Η ροπή κάμψης στο επίπεδο x-y για το διάστημα $0 \leq z \leq \frac{\ell}{2}$ δίδεται από τη σχέση

$$M_x = \frac{P}{2} \cdot z, \quad 0 \leq z \leq \frac{\ell}{2} \quad (8)$$

Στην περίπτωση αυτή οι εξ. (1β) και (1γ) γίνονται:

$$EI_y u''(z) + Nu(z) = \frac{2M_{c,max} \cdot z}{\ell} \cdot \varphi(z) \quad (9)$$

$$\text{και } GJ \varphi'(z) - EC_w \varphi''(z) = -\frac{2M_{c,max} \cdot z}{\ell} \cdot u'(z) + \frac{2M_{c,max}}{\ell} \cdot (u(z) - u(\ell/2)) \quad (10)$$

όπου $M_{c,max} = P \cdot \ell / 4$ η μέγιστη καμπτική ροπή στο μέσον της δοκού. Μετά από αδιαστατοποίηση οι εξ. (9) και (10) γράφονται

$$v''(\xi) + \eta^2 v(\xi) = 2 \cdot \bar{M}_{c,max} \cdot \varphi \cdot \xi \quad (11)$$

$$\text{και } \varphi''(\xi) - \lambda^2 \varphi'(\xi) = 2 \bar{M}_{c,max} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot v'(\xi) - 2 \bar{M}_{c,max} \cdot p^2 \cdot (v(\xi) - v_m) \quad (12)$$

όπου v_m το αδιάστατο οριζόντιο βέλος στο μέσον της δοκού και $\bar{M}_{c,max} = M_{c,max} \cdot \ell / EI_y$.

Μετά από απαλοιφή της συνάρτησης $v(\xi)$ μεταξύ των δύο παραπάνω εξισώσεων και

λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη ότι η ποσότητα $2 \cdot \int_0^{\xi} v(\xi) d\xi - \int_0^{\xi} v_m d\xi \approx 0$ είναι αμελητέα [10]

προκύπτει η κάτωθι διαφορική εξίσωση ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση

$$\varphi'''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \varphi''(\xi) - (\eta^2 \lambda^2 + 4 \bar{M}_{c,max}^2 \cdot p^2 \cdot \xi^2) \cdot \varphi(\xi) = 0 \quad (13)$$

Η τελευταία διαφορική εξίσωση δεν επιδέχεται κλειστή λύση. Για την επίλυσή της χρησιμοποιούμε μια προσεγγιστική τεχνική. Μεταφέρουμε τον μη γραμμικό όρο στο δεύτερο μέλος, οπότε η εξ. (13) λαμβάνει τη μορφή

$$\varphi'''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \varphi''(\xi) - \eta^2 \lambda^2 \cdot \varphi(\xi) = 4 \bar{M}_{c,max}^2 \cdot p^2 \cdot \xi^2 \cdot \varphi(\xi) \quad (14)$$

Για τη γωνία φ στο δεύτερο μέλος εισάγεται η συνάρτηση σχήματος της εξ.(4), που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες και η οποία οδηγεί προσεγγιστικά σε πολύ καλά αποτελέσματα [6].

Η λύση της εξ. (14) με την ανωτέρω προσέγγιση είναι της μορφής

$$\varphi(\xi) = c_1 \cdot \sin(m\xi) + c_2 \cdot \cos(m\xi) + c_3 \sinh(\bar{m}\xi) + c_4 \cdot \cosh(\bar{m}\xi) + \varphi_p \quad (15)$$

όπου φ_p είναι η μερική λύση που θα προκύψει από το δεξιό μέλος και οι σταθερές c_1, c_2, c_3, c_4 θα προκύψουν από τις συνοριακές συνθήκες που είναι:

$\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi'(1/2) = \varphi'''(1/2) = 0$. Λόγω περιορισμού χώρου δεν θα παρουσιάσουμε την πλήρη έκφραση της εξ. (15). Από τη σχέση $\varphi_0 = \varphi(1/2)$ προκύπτει η σχέση αξονικής δύναμης η^2 , μέγιστων κρίσιμων ροπών πλευρικού λυγισμού $\bar{M}_{c,max,cr}$ ενώ από τη σχέση $\varphi(\xi) = 0$ (μόνο στη περίπτωση εφελκυσμού, αφού για θλίψη η $\varphi(\xi) = 0$ ισχύει μόνο για την αφόρτιστη κατάσταση), προκύπτει η ελάχιστη εφελκυστική αξονική δύναμη $\eta_{c,min}^2$ σε σχέση με την μέγιστη καμπτική ροπή $\bar{M}_{c,max}$ για την οποία η δοκός δεν κινδυνεύει να αστοχήσει από στρεπτοκαμπτικό λυγισμό. Οι καμπύλες $\bar{M}_{c,max,cr} - \eta^2$ και $\bar{M}_{c,max}^2 - \eta_{c,min}^2$ προσεγγίστηκαν με απλούστερες εκφράσεις οι οποίες παρουσιάζουν απόκλιση μικρότερη του 1% από τα ακριβή αποτελέσματα και δίδονται από τις παρακάτω σχέσεις αντίστοιχα:

$$\bar{M}_{c,max,cr} = 1.35 \cdot \bar{M}_{0,cr} \quad (16)$$

$$\text{και } \eta_{c,min}^2 = p^2 \frac{\bar{M}_{c,max}^2}{1.35^2 \cdot \lambda^2} \quad (17)$$

όπου $\bar{M}_{0,cr}$ η κρίσιμη ροπή για ομοιόμορφη κάμψη, εξ. (5).

Προς επιβεβαίωση των ανωτέρω λύσεων ως προς το σκέλος των κρίσιμων ροπών πλευρικού λυγισμού χρησιμοποιήσαμε επίσης την μέθοδο Galerkin με βοηθητική συνάρτηση της φ την

$$\varphi(\xi) = a \cdot \varphi_1(\xi) + b \cdot \varphi_2(\xi) = a \cdot \sin(\pi\xi) + b \cdot \sin(3\pi\xi) \quad (18)$$

η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες στα άκρα καθώς επίσης και στο μέσον της δοκού (πρώτη ιδιομορφή).

3.4 Αξονική δύναμη και ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο

Η ισορροπία στην παραμορφωμένη κατάσταση για την περίπτωση αξονικής δύναμης και ομοιόμορφα κατανεμημένου εγκάρσιου φορτίου δίδεται από τις δύο κάτωθι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας:

$$EI_y u''(z) + Nu(z) = \frac{4M_{d,max}}{\ell} \cdot z \cdot \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) \varphi \quad (19)$$

$$\text{και } GJ\varphi'(z) - EC_w\varphi'''(z) = -\frac{4M_{d,max}}{\ell} \cdot z \cdot \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) \cdot u' + q \cdot \left(\frac{\ell}{2} \cdot u - \int_0^{\frac{\ell}{2}} u \cdot dz - u \cdot z + \int_0^z u \cdot dz\right) \quad (20)$$

όπου $M_{d,max} = q \cdot \ell^2 / 8$ η μέγιστη καμπτική ροπή στο μέσον της δοκού. Μετά από αδιαστατοποίηση των τελευταίων εξισώσεων, παράλειψη των αμελητέων (πολύ μικρών) όρων και ακολουθώντας τη διαδικασία που εφαρμόστηκε στην προηγούμενη περίπτωση (παρ. 3.3), καταλήγουμε στη κάτωθι διαφορική εξίσωση ως προς φ :

$$\varphi'''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \varphi''(\xi) - (16\bar{M}_{d,max}^2 \cdot p^2 \cdot \xi^2 \cdot (1 - \xi)^2 + \eta^2 \lambda^2) \cdot \varphi(\xi) = 0 \quad (21)$$

$$\varphi'''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \varphi''(\xi) - \eta^2 \lambda^2 \cdot \varphi(\xi) = 16\bar{M}_{d,max}^2 \cdot p^2 \cdot \xi^2 \cdot (1 - \xi)^2 \cdot \varphi(\xi) \quad (22)$$

όπου $\bar{M}_{d,max} = M_{d,max} \cdot \ell / EI_y$

και στη συνέχεια, προσδιορίζουμε τη σχέση αξονικής δύναμης η^2 και μέγιστης κρίσιμης ροπής $\bar{M}_{d,max,cr}$ (και με τις δύο όπως στη παράγραφο 3.3, υπολογιστικές διαδικασίες) καθώς και το ελάχιστο όριο της εφελκυστικής αξονικής δύναμης $\eta_{d,min}^2$ πέραν της οποίας δεν υπάρχει κίνδυνος πλευρικού λυγισμού. Οι αντίστοιχες απλοποιημένες σχέσεις για την περίπτωση αυτή είναι:

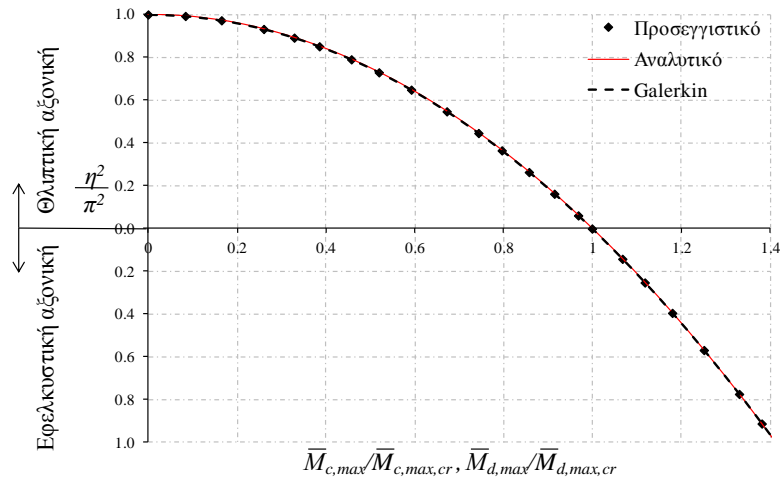
$$\bar{M}_{d,max,cr} = 1.13 \cdot \bar{M}_{0,cr} \quad (23)$$

$$\eta_{d,\min}^2 = p^2 \frac{\bar{M}_{d,\max}^2}{1.13^2 \cdot \lambda^2} \quad (24)$$

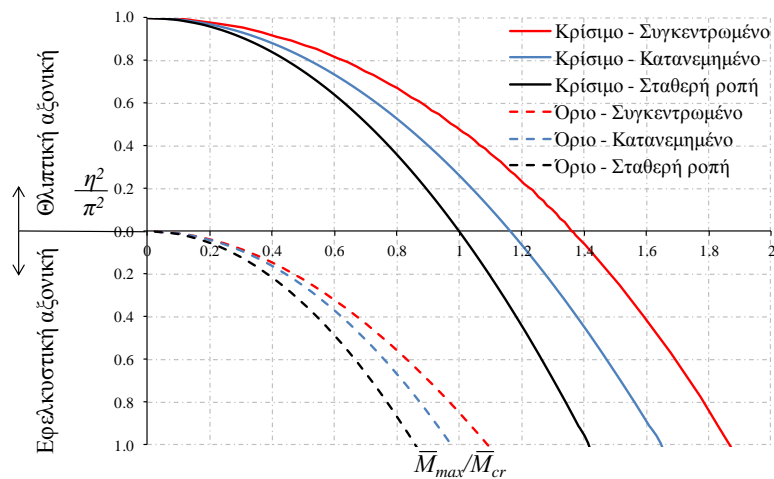
όπου $\bar{M}_{0,cr}$ η κρίσιμη ροπή για ομοιόμορφη ροπή, εξ. (5).

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο Σχ. 3 βλέπουμε την καμπύλη αξονικής δύναμης σε σχέση με την κρίσιμη ροπή που προκύπτουν από τις εξ. (16) και (23) (προσεγγιστική λύση) και οι οποίες ουσιαστικά ταυτίζονται με τις αναλυτικές καμπύλες και τις αντίστοιχες που προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου Galerkin.



Σχ. 3: Διαγράμματα αξονικών δυνάμεων-κρίσιμων ροπών για την περίπτωση εγκάρσιου συγκεντρωμένου φορτίου στο μέσον της δοκού και ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου



Σχ.4: Διαγράμματα αξονικών δυνάμεων-κρίσιμων καμπτικών ροπών για τις τρεις περιπτώσεις εγκάρσιας φόρτισης και αντίστοιχες καμπύλες οριακών αξονικών δυνάμεων-καμπτικών ροπών

Στο Σχ. 4 φαίνονται οι καμπύλες κρίσιμης ροπής-αξονικής δύναμης και για τις τρεις περιπτώσεις εγκάρσιας φόρτισης καθώς επίσης και οι καμπύλες που δίνουν το όριο της αξονικής δύναμης πέραν της οποίας δεν υφίσταται πρόβλημα πλευρικού λυγισμού.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από την ανάλυση που προηγήθηκε και τα αποτελέσματα που προέκυψαν μπορούν να διατυπωθούν τα ακόλουθα συμπεράσματα.

(α) Η σχέση αλληλεπίδρασης κρίσιμης καμπτικής ροπής M -αξονικής δύναμης N για οριακά ζεύγη (M, N) που προκαλούν στρεπτοκαμπτικό λυγισμό μπορεί να αποτυπωθεί ως μια συνεχής καμπύλη καλύπτουσα αμφότερες τις περιοχές θλιπτικού και εφελκυστικού αξονικού φορτίου.

(β) Σε όρους κρίσιμης ροπής στρεπτοκαμπτικού λυγισμού, η επιρροή της εφελκυστικής αξονικής δύναμης μπορεί να οδηγήσει σε πολύ μεγαλύτερη αντοχή.

(γ) Η ροπή πλευρικού λυγισμού μιας δοκού υπό αξονική εφελκυστική δύναμη και για τυχαίο διάγραμμα καμπτικών ροπών μπορεί να προκύψει από τη ροπή πλευρικού λυγισμού για σταθερό διάγραμμα ροπών πολλαπλασιασμένη με ένα αυξητικό συντελεστή. Ο συντελεστής αυτός είναι ίδιος για αντίστοιχο διάγραμμα ροπών της δοκού χωρίς όμως αξονική δύναμη.

(γ) Υπάρχει ένα σχετικό προς τη ροπή μέγεθος της αξονικής εφελκυστικής δύναμης πέραν από το οποίο δεν υπάρχει κίνδυνος αστοχίας από στρεπτοκαμπτικό λυγισμό.

(δ) Το όριο αυτό μπορεί να εκφραστεί με κλειστή έκφραση μόνο για την περίπτωση της ομοιόμορφης κάμψης η οποία δίδεται από την σχ. (6) ή (7) ενώ για τις άλλες δύο περιπτώσεις, συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον της δοκού και κατανεμημένο ομοιόμορφο φορτίο, το όριο αυτό μπορεί να εκφραστεί από τους προσεγγιστικούς τύπους των εξ. (17) και (24) αντίστοιχα.

(ε) Είναι φανερό ότι η σχ. (6) μπορεί συντηρητικά να χρησιμοποιηθεί για οποιαδήποτε εγκάρσια φόρτιση με μέγιστη τιμή M_0 .

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Trahair N. S. "The behavior and design of steel structures", *Chapman and Hall*, London, England, 1977.
- [2] Wang Y., El-Khentas M. and Nethercost D. "Lateral-torsional buckling of end-restraints beams", *J. Constr. Steel Res.*, Vol. 7, No. 5, 1987, pp. 335-362.
- [3] Jian-Xin G., and Siu-Lai C. "A refined finite element formulation for flexural and torsional buckling of beam-columns with finite rotations", *J. Engineering Structures*. Vol. 27, 2005, pp. 749-759.
- [4] Dourakopoulos J. A. and Sapountzakis E. J. "Post-buckling analysis of beams of arbitrary cross section using BEM", *Engineering Structures*, Vol. 32, 2010, pp. 3713-3724.
- [5] Mohri F., Azrar L. and Potier-Ferry M. "Lateral post-buckling analysis of thin-walled open section beams", *Thin-walled Structures*, Vol. 40, 2002, 1013-1036.
- [6] Kounadis A. N. "An efficient and simple approximate technique for solving nonlinear initial and boundary-value problems", *Computational Mechanics*, Vol. 9, 1992, pp. 221-231.
- [7] Ioannides G. I. and Avraam T. P. "Lateral-Torsional buckling of simply supported beams under uniform bending and axial tensile force", *Archive of Applied Mechanics*, Special Issue, Vol. 82, 2012, pp. 1393-1402.
- [8] Timoshenko S. P and Gere J. M. "Theory of Elastic Stability", *McGraw-Hill Book Company*, Second Edition, 1961.
- [9] Kounadis A. N and Ioannides G. I. "Lateral Postbuckling Analysis of Beam Columns", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 120, No. 4, 1994, 695-706.
- [10] Chen W. E. and Lui E. M. "Structural Stability Theory and Implementation", *Elsevier Science Publishing co.*, 1987.

THE INFLUENCE OF AXIAL TENSION TO THE CRITICAL MOMENT OF LATERAL BUCKLING

Tassos P. Avraam

Lecturer

National Technical University of Athens

Athens, Greece

e-mail: avraamt@central.ntua.gr

Zacharias C. Fasoulakis

PhD Candidate

National Technical University of Athens

Athens, Greece

e-mail: zaf@central.ntua.gr

George I. Ioannides

Professor

National Technical University of Athens

Athens, Greece

e-mail: giorgos.ioan@gmail.com

SUMMARY

Lateral-torsional buckling is the failure mode of laterally unsupported beams or beam-columns. The presence of an axial tensile force has a favorable influence on the bending capacity which usually is not taken into account. For this effect relative references are not included in the most of the current codes. In the present work the critical (elastic) bending moment M is calculated for the case of coexistence of an axial compressive or, mainly, a tensile force N . Three cases of transversal loading are examined for simply supported beams: uniform bending (two equal end moments), concentrated load at the middle of the span and uniformly distributed load. For each case interaction curves are traced showing a continuity when moving from the compressive to the tensile axial force. In addition approximate analytical relations M - N are proposed for the above cases. Using approximation techniques, it has been found that the critical moment of lateral buckling of a beam under a constant axial force and non uniform bending is increased compared to the case of same axial force and uniform bending moment in same percent as the critical moment is increased for an equivalent case of no axial force. Finally the characteristic level of the axial tensile load, beyond which lateral-torsional buckling cannot occur, is determined given by simple approximate equations.